

М. М. РУСИНОВ

6817  
Р. 88

# ТЕХНИЧЕСКАЯ ОПТИКА

20480

РСФСР  
Башкирская  
Уфимский лимзавод  
Техническая библиотека



ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1961 ЛЕНИНГРАД

Книга посвящена следующим вопросам, связанным с разработкой оптических приборов с повышенными оптическими характеристиками: геометрическая широкоугольная оптика; ограничение световых пучков при больших полях зрения; учение об аберрациях; синтез оптических систем.

Рассматриваются общие закономерности, справедливые при больших полях зрения, и свойства главнейших конструктивных элементов, входящих в различные оптические приборы, применительно к большим полям зрения.

Последняя часть книги содержит материал, позволяющий решать основные технические вопросы при разработке систем с повышенными оптическими характеристиками.

Книга рассчитана на инженерно-технических работников, занимающихся расчетами оптических систем, работников лабораторий и может быть полезна студентам оптических факультетов высших учебных заведений.

Рецензент д-р физ.-мат. наук. *Е. Г. Яхонтов*  
Редактор инж. *В. В. Хваловский*

---

ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ МАШГИЗА

Редакция литературы по технологии машиностроения  
Заведующий редакцией инж. *Е. П. Наумов*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Развитие оптического приборостроения по сравнению с другими областями приборостроения отличается некоторым своеобразием.

Разработкой оптики первоначально занимался узкий круг специалистов, работавших непосредственно на оптических заводах, и методы, с помощью которых производились расчеты, оставались в сфере этих заводов.

Этому способствовала и специфика оптико-механического производства — возможность использования одного и того же расчета оптики в различных приборах и на разных предприятиях в течение длительного времени.

Например, расчет оптики шестикратного бинокля, сделанный еще в прошлом столетии, не утратил своего значения до наших дней; расчет портретного объектива, выполненный Пецвалем в 1840 г., устарел лишь к 1920—1930 гг., оправдывая себя на протяжении чуть ли не целого столетия.

Основная номенклатура оптических систем также была невелика и почти полностью разработана в прошлом столетии.

Весьма показательно, что к началу первой мировой войны союзные державы оказались в весьма затруднительном положении, так как они не имели своей сколько-нибудь развитой оптико-механической промышленности. Война заставила Англию, Францию, Россию создавать и развивать свои оптико-механические заводы; но на первых порах эти заводы не вели самостоятельных расчетов оптики, прибегая к копированию уже имевшихся образцов.

Подобное положение не могло способствовать развитию расчетов оптики, которое заметно замедлилось и свелось в основном к разработке фотографической оптики.

Большая трудоемкость сколько-нибудь серьезных работ по усовершенствованию того или иного расчета оптики, сильная лишь коллективам специализированных вычислительных бюро, также не способствовала развитию этого дела.

Естественно, что это отразилось и на развитии теории. Созданная в середине прошлого столетия теория оптических приборов не подверглась до настоящего времени значительным изменениям.

Классическая теория оптических приборов, первоначально решавшая вопросы разработки сравнительно простых оптических систем с небольшими полями зрения и небольшими апертурами, стала развиваться по линии приближенных методов расчета, общих для самых разнообразных оптических систем. Этому способствовала также кажущаяся невозможность оперирования в области реальных полей зрения и апертур из-за сложности получавшихся соотношений.

Однако за последние 30 лет был создан ряд оптических систем с очень большими полями зрения и апертурами; в каждом случае вырабатывались свои приемы и методы расчета, свои конструктивные приемы, которые уже не могли обосновываться на общей приближенной теории и требовали самостоятельного изучения.

Таким образом, возник разрыв между классической теорией оптических приборов и требованиями современности, заставивший перестроить эту теорию, используя уже накопленный практический опыт в области расчета широкоугольных и светосильных оптических систем.

Настоящая работа является попыткой разрешения этой задачи.

---

# ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ШИРОКОУГОЛЬНАЯ ОПТИКА

## Глава I

### СОЛИНЕЙНОЕ СРОДСТВО ПРИ БОЛЬШИХ ПОЛЯХ

#### § 1. Основные положения

Как известно, геометрическая оптика занимается решением вопросов, связанных с распространением света и образованием изображений, базируясь на законах прямолинейного распространения света, законах отражения и преломления света.

Геометрическая оптика игнорирует явления интерференции, поляризации, дифракции и другие явления физической оптики, абстрагируя тем самым законы образования оптического изображения.

Одна эта абстрактность геометрической оптики, аналогично абстрактности теоретической механики, в значительной степени облегчает понимание основных соотношений и закономерностей, давая исследователю и конструктору-оптику действенные методы изучения и создания разрабатываемой оптической системы.

При разработке и изучении широкоугольных и светосильных оптических систем нет возможности использовать без изменений положения, установленные обычной геометрической оптикой, так как все формулы обычной геометрической оптики строятся в предположении, что изучаемые пучки лучей не составляют больших углов с осью оптической системы.

В силу этого придется перестроить ряд основных формул геометрической оптики, отказавшись от допущения малости углов лучей с осью системы.

В целях удобства будем сохранять последовательность рассматриваемых вопросов, применявшуюся в классической теории.

Теория солинейного сродства строится на следующих положениях.

1. Прямой в пространстве предметов соответствует однозначно прямая в пространстве изображений.
2. Точке пересечения двух прямых в пространстве предметов соответствует точка пересечения двух сопряженных прямых в пространстве изображений.
3. Оба пространства центрированы вокруг осей; оси обоих пространств сопряжены одна с другой.

4. Плоскости в пространстве предметов, перпендикулярной оси, соответствует плоскость в пространстве изображений, также перпендикулярная оси системы.

Эти положения теории солинейного средства в достаточной степени соблюдаются вблизи оси любой оптической системы и даже для точек, значительно удаленных от оси, для хорошо скорректированных оптических систем.

Однако в общем случае оптической системы с большим полем зрения или с большими апертурами эти положения уже не будут полностью соблюдаться. Например, нельзя принимать, что любой плоскости, перпендикулярной оси системы, соответствует плоскость, перпендикулярная оси в пространстве изображений; причиной тому является наличие искривления изображения (кривизна поля).

Наличие астигматизма в наклонных пучках потребует пересмотра условия гомоцентричности (придется рассматривать ход лучей в двух плоскостях: сагиттальной и меридиональной). В связи с этим следует принять несколько иные исходные положения для построения теории солинейного средства при больших полях зрения.

В частности, можно сохранить условие солинейности между лучами, а также условие сопряженности осей, понимая под этим сопряженность главных лучей входящего и выходящего наклонных пучков; принимая главные лучи идущими в меридиональной плоскости, можно наложить условие симметрии относительно меридиональной плоскости, вытекающее из центрированности оптической системы.

Рассматривая элементарные участки предмета и изображения вокруг точек пересечения главного луча с предметом и его изображением, можно наложить условие сопряженности для этих элементов.

В общем случае эти элементарные площадки могут быть ориентированы относительно оси системы произвольно; однако без существенного ущерба можно допустить перпендикулярность этих элементарных площадок к оси системы.

Такое допущение будет расходиться с практикой; однако это даст возможность получить элементарное изображение, перпендикулярное оси системы, за счет глубины изображения при проецировании элементарного изображения на экран, перпендикулярный оси системы.

Таким образом, для солинейного средства в области больших полей зрения или больших апертурных углов можно сформулировать следующие положения.

1. Каждому лучу в пространстве предметов соответствует луч в пространстве изображений.

2. В каждом пространстве имеется ось; обе оси сопряжены одна с другой; вокруг осей в сагиттальной и в меридиональной плоскостях имеет место симметрия для лучей, идущих вблизи осей.

3. Непрерывному переходу от одного луча к другому в пространстве предметов соответствует также непрерывный переход между соответственными сопряженными лучами в пространстве изображений.

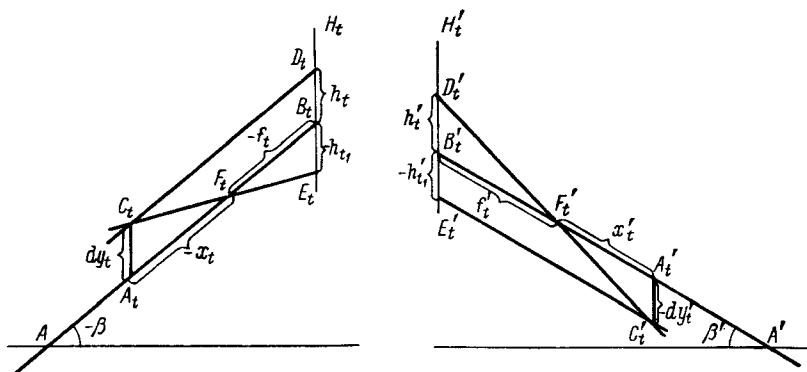
4. Каждому элементу предмета, перпендикулярному оси системы в пространстве предметов, сопряжен элемент изображения, также перпендикулярный оси системы.

## § 2. Понятие о фокусных расстояниях вдоль главного луча

На фиг. 1 показан ход главного луча, составляющего углы  $\beta$  и  $\beta'$  с осью системы в пространстве предметов и пространстве изображений соответственно. Углы  $\beta$  и  $\beta'$  конечны.

Перемещая на главном луче в пространстве предметов некоторую точку  $A$  (точку  $A_t$  для бесконечно тонких пучков в меридиональной плоскости и точку  $A_s$  для соответствующих пучков в сагиттальной плоскости), получим для бесконечно тонких пучков (соответственно меридиональных и сагиттальных) в пространстве изображений точки  $A'_t$  и  $A'_s$ , являющиеся соответственно изображениям точек  $A_t$  и  $A_s$ .

При перемещении на бесконечность точек  $A_t$  и  $A_s$  в пространстве предметов, сопряженные с ними точки  $A'_t$  и  $A'_s$  займут положения точек  $F'_t$  и  $F'_s$ , т. е. задних фокусов меридионального и сагиттального.



Фиг. 1. Фокусные расстояния вдоль главного луча.

При перемещении на бесконечность в пространстве изображений точек  $A'_t$  и  $A'_s$  сопряженные с ними точки  $A_t$  и  $A_s$  займут положения  $F_t$  и  $F_s$ , т. е. передних меридионального и сагиттального фокусов.

Рассмотрим сначала картину в меридиональной плоскости. Полагая элементарные изображения в любой паре сопряженных точек на главном луче перпендикулярными оси системы (как части плоских изображений, перпендикулярных оси), можно определить понятие элементарного линейного увеличения  $V_t$  в меридиональной плоскости как отношение элемента меридионального изображения к элементу предмета.

Полагая элементарное меридиональное линейное увеличение равным единице, определим положение такой пары сопряженных точек, в которых элемент предмета будет равен элементу изображения; эти элементы уместно назвать, по аналогии с главными плоскостями в обычной теории солинейного сродства, главными меридиональными линиями.

В сагиттальной плоскости можно определить понятия сагиттального элементарного линейного увеличения  $V_s$  и главных сагиттальных линий.

Условимся обозначать главные линии, меридиональные и сагиттальные, буквами  $H_t$  и  $H'_t$  и  $H_s$  и  $H'_s$ .

Расстояния от главных точек  $B_t$  и  $B'_t$  или  $B_s$  и  $B'_s$  до соответствующих фокусов будем называть фокусными расстояниями от главных линий; передними и задними и меридиональными и сагиттальными.

Фокусные расстояния от главных линий условимся обозначать через  $f_t$  и  $f'_t$  для меридиональной плоскости и через  $f_s$  и  $f'_s$  для сагиттальной плоскости.

Отрезки от фокусов до сопряженных точек вдоль главного луча будем обозначать через  $x_t$  и  $x'_t$  для меридиональной плоскости и через  $x_s$  и  $x'_s$  для сагиттальной плоскости.

Обратимся к фиг. 1. Обозначим элемент предмета  $A_t C_t$  через  $dy_t$ ; через вершину  $C_t$  этого элемента проведем луч, параллельный главному лучу, и другой луч, проходящий через передний фокус. Эти два луча согласно определению понятия фокусов и главных линий должны будут в пространстве изображений пройти через задний фокус (луч, шедший параллельно главному лучу в пространстве предметов) и параллельно выходящему главному лучу (луч, проходивший в пространстве предметов через передний фокус); отрезки, образуемые этими двумя лучами на главных линиях, должны быть попарно равны друг другу. Таким образом,

$$dy_t = A_t C_t = B_t D_t = h_t = B'_t D'_t = h'_t; \quad (1)$$

$$-h_{t1} = B_t E_t = B'_t E'_t = -h'_{t1} = A'_t C'_t = -dy'_t. \quad (2)$$

Из подобия треугольников, образованных в пространстве предметов точками  $A_t C_t F_t$  и  $B_t E_t F_t$  следует:

$$\frac{-h_{t1}}{dy_t} = \frac{-f_t}{-x_t} = -\frac{dy'_t}{dy_t} = -V_t. \quad (3)$$

И из треугольников  $A'_t C'_t F'_t$  и  $B'_t D'_t F'_t$ , образованных в пространстве изображений:

$$\frac{-dy'_t}{h'_t} = \frac{x'_t}{f'_t} = -\frac{dy'_t}{dy_t} = -V_t, \quad (4)$$

откуда без особого труда определяем линейное меридиональное увеличение  $V_t$ :

$$V_t = \frac{dy'_t}{dy_t} = -\frac{f_t}{x_t}; \quad (5)$$

$$V_t = \frac{dy'_t}{dy_t} = -\frac{x'_t}{f'_t}. \quad (6)$$

Из формул (5) и (6) получаем окончательно:

$$V_t = \frac{dy'_t}{dy_t} = -\frac{f_t}{x_t} = -\frac{x'_t}{f'_t}. \quad (7)$$

Из формулы (7) нетрудно получить формулу Ньютона для отрезков от фокусов вдоль главного луча в меридиональной плоскости:

$$x_t x'_t = f_t f'_t. \quad (8)$$

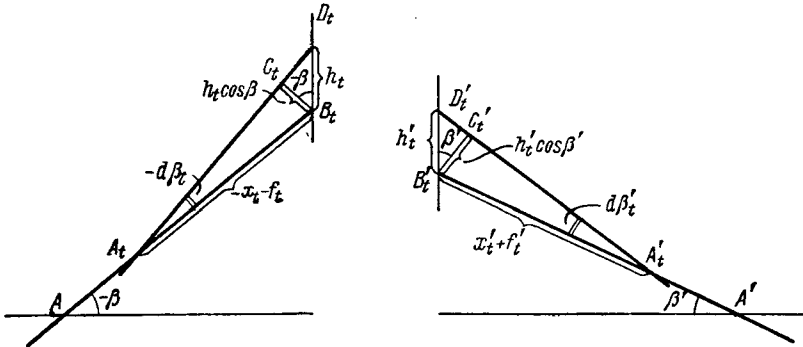


Аналогичным путем можно получить формулу Ньютона и для сагиттальной плоскости:

$$x_s x'_s = f_s f'_s, \quad (9)$$

однако сагиттальные и меридиональные увеличения и фокусные расстояния от главных линий не связаны друг с другом.

Полученные формулы по своему виду ничем не отличаются от классических формул солинейного сродства. Отсюда не следует делать вывод, что все формулы элементарного солинейного сродства могут быть автоматически перенесены в область больших полей зрения; в частности, формулы для углового увеличения в меридиональной плоскости будут иметь несколько иной вид.



Фиг. 2. Определение углового увеличения.

Перейдем к рассмотрению углового увеличения.

Обратимся к фиг. 2, на которой, как и раньше,  $A_t$  и  $A'_t$  — пара сопряженных меридиональных точек;  $h_t$  и  $h'_t$  — отрезки на главных линиях;  $d\beta_t$  и  $d\beta'_t$  — углы с главным лучом меридионального луча, проходящего через точки  $A_t$  и  $A'_t$ .

Определим углы  $d\beta_t$  и  $d\beta'_t$ . Из фиг. 2 находим:

$$d\beta_t = \frac{h_t \cos \beta_t}{x_t + f_t}; \quad (10)$$

$$d\beta'_t = \frac{h'_t \cos \beta'_t}{x'_t + f'_t}. \quad (11)$$

Разделив  $d\beta'_t$  на  $d\beta_t$  и сократив на  $h_t$ , получим угловое увеличение  $W_t$  в меридиональной плоскости:

$$W_t = \frac{\cos \beta'_t}{\cos \beta} \cdot \frac{x_t + f_t}{x'_t + f'_t}. \quad (12)$$

Преобразовав числитель на основании формулы Ньютона и сделав сокращение на  $x'_t + f'_t$ , находим для углового увеличения следующее выражение:

$$W_t = \frac{f_t}{x'_t} \cdot \frac{\cos \beta'_t}{\cos \beta} = - \frac{f_t}{f'_t V_t} \cdot \frac{\cos \beta'_t}{\cos \beta}, \quad (13)$$

откуда можно получить формулу для произведения углового и линейного меридиональных увеличений:

$$V_t W_t = - \frac{f_t}{f'_t} \cdot \frac{\cos \beta'}{\cos \beta}. \quad (14)$$

Понятие о фокусных расстояниях от узловых точек. Определим понятие об узловых точках, исходя из условия, что угловое увеличение в них равно единице.

Для узловых точек можно написать

$$W_{t_0} = 1. \quad (15)$$

Тогда для линейного увеличения на основании формулы (14)

$$V_{t_0} = - \frac{f_t}{f'_t} \cdot \frac{\cos \beta'}{\cos \beta}. \quad (16)$$

Обозначая соответственные отрезки от фокусов до узловых точек  $x_{0t}$  и  $x'_{0t}$  как  $\hat{f}_t$  и  $\hat{f}'_t$ , тем самым определим понятие фокусных расстояний от узловых точек (изменение знаков у  $\hat{f}_t$  и  $\hat{f}'_t$  объясняется тем, что фокусные расстояния будут отсчитываться от узловых точек к фокусам); для фокусных расстояний от узловых точек будем иметь:

$$V_{t_0} = - \frac{x'_{t_0}}{f'_t} = - \frac{f_t}{x_{t_0}} = \frac{\hat{f}'_t}{\hat{f}_t} = \frac{f_t}{\hat{f}_t}. \quad (17)$$

Перемножив крест накрест, получим

$$\hat{f}'_t \hat{f}_t = \hat{f}'_t \hat{f}_t, \quad (18)$$

т. е. произведение узловых фокусных расстояний равно произведению фокусных расстояний от главных линий.

Согласно равенствам (16) и (17) следует:

$$V_{t_0} = \frac{\hat{f}'_t}{\hat{f}_t} = \frac{f_t}{\hat{f}_t} = - \frac{f_t}{\hat{f}_t} \cdot \frac{\cos \beta'}{\cos \beta}, \quad (19)$$

откуда

$$\hat{f}'_t = - f_t \cdot \frac{\cos \beta'}{\cos \beta}; \quad (20)$$

$$\hat{f}_t = - f'_t \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \beta'}. \quad (21)$$

Формула (13) для углового увеличения и формула (14) для произведения углового и линейного увеличений, на основании формул (20) и (21), могут быть выражены через фокусные расстояния от узловых точек:

$$W_t = - \frac{\hat{f}'_t}{\hat{f}_t V_t} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \beta'}; \quad (22)$$

$$V_t W_t = - \frac{\hat{f}'_t}{\hat{f}_t} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \beta'}. \quad (23)$$

Развертывая формулу (14), можно представить ее в следующем виде:

$$\frac{d\beta'_t}{d\beta_t} \cdot \frac{dy'_t}{dy_t} = - \frac{f_t}{f'_t} \cdot \frac{\cos \beta'}{\cos \beta} \quad (24)$$

или, аналогично формулам из обычной теории солинейного средства, можно формулу (24) представить в виде инварианта:

$$f'_t dy_t \frac{d\beta'_t}{\cos \beta'_t} = - f_t dy_t \frac{d\beta_t}{\cos \beta_t}. \quad (25)$$

Инвариант (25) можно выразить и через фокусные расстояния от узловых точек, используя для этого формулы (20) и (21).

В этом случае инвариант принимает несколько иной вид:

$$\frac{dy'_t}{f'_t} \cos \beta' d\beta'_t = - \frac{dy_t}{f_t} \cos \beta d\beta_t. \quad (26)$$

### § 3. Формулы для сагиттальной плоскости

В сагиттальной плоскости предмет и изображение всегда можно образовать, поворачивая на небольшой угол всю меридиональную плоскость вокруг оси системы (на фиг. 3 показан поворот на угол  $d\gamma$ ). при этом и предмет, и его изображение будут перпендикулярны к главному лучу.

В силу этого в формулах, связывающих фокусные расстояния, увеличения, отрезки  $x$  и  $x'$  для сагиттальной плоскости, должны выпасть множители, содержащие  $\cos \beta$  и  $\cos \beta'$ ; таким образом, можно получить, исходя из уже найденных формул для меридиональной плоскости, все аналогичные формулы для сагиттальной плоскости.

Для линейного увеличения

$$V_s = - \frac{f_s}{x_s} = - \frac{x'_s}{f'_s}. \quad (27)$$

Для углового увеличения

$$W_s = \frac{f_s}{x'_s} = \frac{x_s}{f'_s} = - \frac{f_s}{f'_s V_s}. \quad (28)$$

Для произведения линейного и углового увеличений

$$V_s W_s = - \frac{f_s}{f'_s}. \quad (29)$$

Для линейного увеличения в узловых точках

$$V_{s_0} = - \frac{f_s}{f'_s}. \quad (30)$$

Для узловых фокусных расстояний

$$f'_s = - f_s; \quad (31)$$

$$f_c = - f'_s. \quad (32)$$

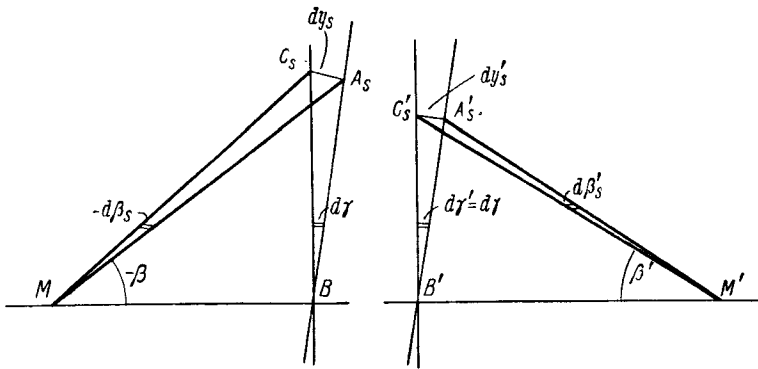
Инварианты вдоль главного луча в сагиттальной плоскости:

$$f'_s dy'_s d\beta'_s = -f_s dy_s d\beta_s; \quad (33)$$

$$\frac{dy'_s}{f'_s} d\beta'_s = -\frac{dy_s}{f_s} d\beta_s. \quad (34)$$

Небезынтересно, что в сагиттальной плоскости имеют место и при-  
сущие только самой сагиттальной плоскости соотношения.

На фиг. 3 имеются следующие обозначения:  $M$  и  $M'$  — точки пересечения главного луча с осью системы, образующего с ней углы  $\beta$  и  $\beta'$ ;  $dy_s$  и  $dy'_s$  — элементы предмета и изображения, образованные поворотом всей меридиональной плоскости на некоторый малый угол  $d\gamma$  и  $d\gamma' = d\gamma$  вокруг оси системы;  $d\beta_s$  и  $d\beta'_s$  — углы, образующиеся между главным и сагиттальным лучами при повороте меридиональной плоскости.



Фиг. 3. Сагиттальные плоскости.

Из фиг. 3 нетрудно установить зависимость между углами  $d\beta_s$  и  $d\beta'_s$  и  $d\gamma$  и  $d\gamma'$ . Действительно, углы  $d\gamma$  и  $d\gamma'$  можно рассматривать как проекции углов  $d\beta_s$  и  $d\beta'_s$ . В силу этого можно написать:

$$d\beta_s = d\gamma \sin \beta; \quad d\beta'_s = d\gamma \sin \beta'. \quad (35)$$

Составляя отношение углов  $d\beta'_s$  и  $d\beta_s$  и сокращая его на угол  $d\gamma$ , получим угловое увеличение  $W_{sM}$  в сагиттальной плоскости для точек пересечения  $M$  и  $M'$  главного луча с осью системы:

$$W_{sM} = \frac{d\beta'_s}{d\beta_s} = \frac{\sin \beta'}{\sin \beta}; \quad (36)$$

пользуясь формулой (29), можно получить и линейное увеличение в сагиттальной плоскости для точек  $M$  и  $M'$ :

$$V_{sM} = -\frac{f_s}{f'_s} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \beta'}. \quad (37)$$

Определим теперь понятие продольного увеличения как отношения двух сопряженных друг другу отрезков, лежащих на главном луче в пространствах изображений и предметов.

Такие сопряженные отрезки можно представить себе как разность двух отрезков  $x_1$  и  $x_2$  в пространстве предметов и отрезков  $x'_1$  и  $x'_2$ , сопряженных с отрезками  $x_1$  и  $x_2$ , в пространстве изображений. Обозначая продольное увеличение буквой  $Q$ , можно написать:

$$Q = \frac{x'_1 - x'_2}{x_1 - x_2}. \quad (38)$$

Определяя отрезки  $x'_1$  и  $x'_2$  по формуле Ньютона и делая сокращения, получаем:

$$Q = - \frac{ff'}{x_1 x_2}. \quad (39)$$

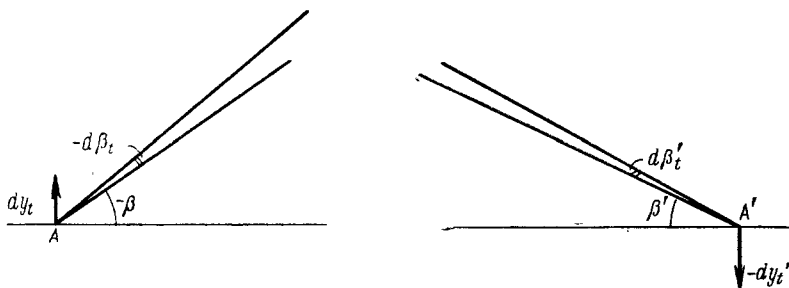
С помощью формулы (5) или (27) для линейного увеличения формула для продольного увеличения может быть преобразована:

$$Q = - \frac{f'}{f} V_1 V_2. \quad (40)$$

Формула (40) справедлива как для сагиттальной, так и для меридиональной плоскостей.

#### § 4. Условие изображения бесконечно малого предмета на оси широкими пучками лучей

Пользуясь формулами, выведенными в предыдущих параграфах, можно легко получить изображение элемента предмета, лежащего на оси системы, с помощью широких пучков лучей.



Фиг. 4. Меридиональный инвариант вдоль луча.

На фиг. 4  $dy_t$  — элемент предмета, перпендикулярный оси системы;  $dy'_t$  — изображение этого элемента. Луч, проходящий через точку  $A$  предмета, составляет с осью системы угол  $\beta$ ; луч, проходящий через точку  $A'$  изображения, образует с осью системы угол  $\beta'$ .

Для того чтобы все лучи, исходящие из произвольной точки элемента предмета, сошлись бы в одной и той же точке элемента изображения, необходимо чтобы линейное увеличение  $V_t$  для всех лучей, прошедших через рассматриваемую точку элемента предмета, имело одно и то же значение, равное линейному увеличению  $V_0$  для нулевых лучей.

Поэтому можно написать:

$$V_t = V_0 = \text{const.} \quad (41)$$

Пользуясь инвариантом (26), можно получить выражение для линейного увеличения в меридиональной плоскости:

$$-\frac{dy'_t}{f'_t} \cos \beta'_t d\beta'_t = \frac{dy_t}{f_t} \cos \beta_t d\beta_t. \quad (42)$$

Откуда, интегрируя, получим зависимость между узловыми фокусными расстояниями  $f_t$  и  $f'_t$ , углами  $\beta_t$  и  $\beta'_t$  и линейным увеличением  $V_t$ .

Постоянную интегрирования нетрудно определить, исходя из инварианта Лагранжа — Гельмгольца для нулевых лучей:

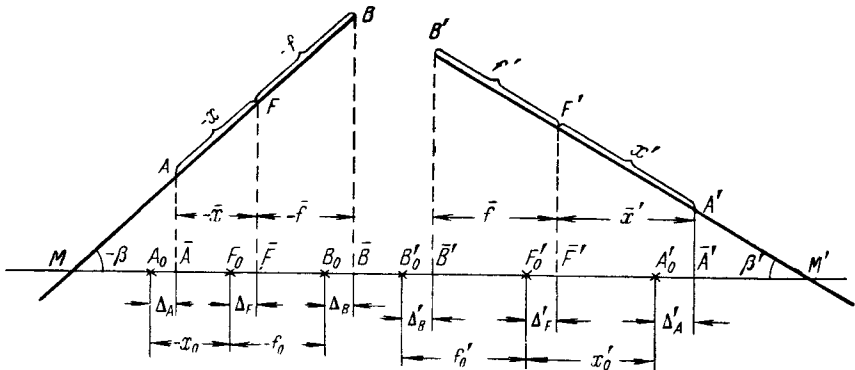
$$V_t = V_0 = \frac{dy'_t}{dy_t} = -\frac{f'_t \sin \beta_t}{f_t \sin \beta'_t}. \quad (43)$$

Таким образом, окончательно получаем выражение для линейного увеличения, связывающее его с узловыми фокусными расстояниями и углами лучей с осью.

Формула (43) по внешнему виду весьма напоминает выражение для известного условия синусов Аббе, с той лишь разницей, что здесь роль показателей преломления играют узловые фокусные расстояния. Вместе с тем, она более обща, нежели условие синусов, так как получена из чисто геометрических соотношений, даже без введения самого понятия о показателях преломления.

### § 5. Изменение кривизны поля при изменении увеличения

Предположим, что мы имеем главный луч  $AB$  в пространстве предметов и сопряженный с ним главный луч  $A'B'$  в пространстве изображений (фиг. 5).



Фиг. 5. Изменение кривизны поверхности изображения.

Отрезки  $f$  и  $f'$  — суть фокусные расстояния от главных линий (вдоль луча);  $A$  и  $A'$  — пара сопряженных точек на главном луче; точки  $\bar{A}$ ,  $\bar{A}'$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{B}'$  и т. д. (с чертой сверху) суть проекции на ось системы соответствующих точек на главном луче.

Точки  $A_0, A'_0$  и  $F_0, F'_0$ —предмет и изображение, передний и задний фокусы для нулевых лучей (параксиальных лучей),  $B_0$  и  $B'_0$ —главные точки для нулевых лучей. Фокусные расстояния и отрезки от фокусов для нулевых лучей будем обозначать соответственно через  $f_0, f'_0, x_0$  и  $x'_0$ .

Величины несовпадения точек  $\bar{A}$  и  $A_0$ , точек  $F$  и  $F_0$  и т. д. будем обозначать знаком  $\Delta$  с соответствующими индексами.

Главный луч составляет с осью системы углы  $\beta$  и  $\beta'$ . Определим проекции отрезков вдоль главного луча на ось системы. Из фиг. 5 следует:

$$\bar{x} = x \cos \beta; \quad \bar{f} = f \cos \beta; \quad (44)$$

$$\bar{x}' = x' \cos \beta'; \quad \bar{f}' = f' \cos \beta'. \quad (45)$$

Составим произведения  $\bar{x}\bar{x}'$  и  $\bar{f}\bar{f}'$ . Находим:

$$\bar{x}\bar{x}' = xx' \cos \beta \cos \beta'; \quad \bar{f}\bar{f}' = ff' \cos \beta \cos \beta'. \quad (46)$$

Ранее было установлено, что произведения отрезков от фокусов вдоль главного луча подчиняются формуле Ньютона [см. формулы (8) и (9)], поэтому

$$\bar{x}\bar{x}' = \bar{f}\bar{f}'. \quad (47)$$

Из формулы (47) следует, что проекции отрезков от фокусов на ось системы также подчиняются формуле Ньютона.

Из фиг. 5 следует:

$$-\bar{x} + \Delta_A = -x_0 + \Delta_F; \quad \bar{x}' + \Delta'_F = x'_0 + \Delta'_A; \quad (48)$$

$$\bar{x} = x_0 + \Delta_A - \Delta_F; \quad \bar{x}' = x'_0 + \Delta'_A - \Delta'_F, \quad (49)$$

составив произведение из равенств (49), получим:

$$(x_0 + \Delta_A - \Delta_F)(x'_0 + \Delta'_A - \Delta'_F) = \bar{x}\bar{x}' = \bar{f}\bar{f}' = \text{const.} \quad (50)$$

Формула (50) связывает между собой следующие величины:  $\Delta_A$  — кривизну предмета;  $\Delta_F$  — кривизну передней фокальной поверхности;  $\Delta'_F$  — кривизну задней фокальной поверхности;  $\Delta'_A$  — кривизну изображения с величинами отрезков для нулевых лучей от переднего фокуса до предмета и от заднего фокуса до изображения. Формула (50) тождественна как для меридиональной, так и для сагиттальной плоскостей.

## Глава II

### ОПТИКА УЗКИХ АСТИГМАТИЧЕСКИХ ПУЧКОВ

#### § 6. Узкие пучки в меридиональной плоскости. Вывод меридионального инварианта

Рассмотрим меридиональное сечение сферической преломляющей поверхности, разделяющей две среды с различными показателями преломления  $n$  и  $n'$  (фиг. 6).

На фиг. 6  $O_t$  — центр преломляющей поверхности;  $A_t$  — точка предмета;  $A'_t$  — ее изображение, полученное с помощью узкого меридионального пучка  $A_t N N_1$ . Обозначим соответственные апертурные углы падающего и преломленного пучков через  $d\beta_t$  и  $d\beta'_t$ . Углы падения и преломления обозначим через  $i$  и  $i'$  для луча  $A_t N A'_t$  и через  $i + di$  и  $i' + di'$  для луча  $A_t N_1 A'_t$ .

Соединим предмет  $A_t$  и изображение  $A'_t$  с центром преломляющей поверхности  $O_t$ ; углы  $NA_t O_t$  и  $NA'_t O_t$  обозначим через  $\beta$  и  $\beta'$ . Из фиг. 6 следует:

$$-i = -\beta - \gamma; \quad -\gamma' = -i' + \beta'; \quad (51)$$

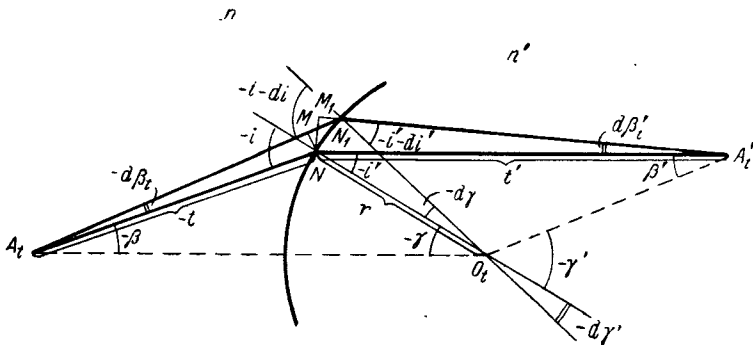
дифференцируя оба выражения, получаем:

$$di = d\beta + d\gamma; \quad di' = d\beta' + d\gamma'; \quad (52)$$

кроме того,

$$d\gamma = d\gamma' = -\frac{NN_1}{r}. \quad (53)$$

Отрезки от точки  $N$  до предмета и изображения обозначим через  $t$  и  $t'$ . Из точки  $N$  восстановим перпендикуляры  $NM$  и  $NM_1$  к лучам



Фиг. 6. Преломление луча на сферической поверхности в меридиональной плоскости.

$A_t N_1$  и  $N_1 A'_t$ . Величины этих перпендикуляров определятся из треугольников  $NMN_1$  и  $NM_1 N_1$ :

$$NM = NN_1 \cos i; \quad NM_1 = NN_1 \cos i'. \quad (54)$$

Отрезки  $NM$  и  $NM_1$  можно определить через отрезки  $t$  и  $t'$ :

$$NM = t d\beta_t; \quad NM_1 = t' d\beta'_t. \quad (55)$$

Из формул (54) и (55) следует:

$$\frac{t d\beta_t}{t' d\beta'_t} = \frac{\cos i}{\cos i'}. \quad (56)$$

По закону преломления

$$n \sin i = n' \sin i'. \quad (57)$$



Логарифмируя, а затем дифференцируя формулу (57), находим:

$$\frac{di}{\operatorname{tg} i} = \frac{di'}{\operatorname{tg} i'} \quad (58)$$

На основании формулы (52), можно формулу (58) представить в следующем виде:

$$\frac{d\beta_t - d\gamma}{\operatorname{tg} i} = \frac{d\beta'_t - d\gamma'}{\operatorname{tg} i'} \quad (59)$$

или, пользуясь формулами (53) и (54), после сокращения на  $NN_1$  получаем:

$$\frac{\cos i}{t} \frac{1}{r} = \frac{\cos i'}{t'} \frac{1}{r} \quad (60)$$

Умножая числитель и знаменатель левой части формулы (60) на  $n$  и правой части на  $n'$  и имея в виду равенство (57), получаем:

$$n \left[ \frac{\cos^2 i}{t} - \frac{\cos i}{r} \right] = n' \left[ \frac{\cos^2 i'}{t'} - \frac{\cos i'}{r} \right] \quad (61)$$

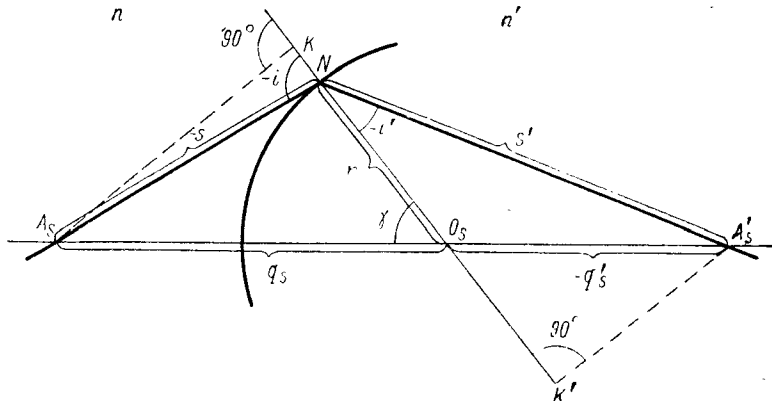
— инвариант для узких меридиональных пучков.

Формула (61) может быть представлена в несколько ином виде:

$$\frac{n' \cos^2 i'}{t'} - \frac{n \cos^2 i}{t} = \frac{n' \cos i'}{r} - \frac{n \cos i}{r} \quad (62)$$

### § 7. Узкие пучки в сагиттальной плоскости. Вывод сагиттального инварианта

На фиг. 7 имеются следующие обозначения:  $O_s$  — центр преломляющей поверхности радиуса  $r$ , разделяющей две среды с показателями преломления  $n$  и  $n'$ ;  $A_s NA_s$  — ход главного луча, преломляе-



Фиг. 7. Пример вывода сагиттального инварианта.

мого поверхностью в некоторой точке  $N$ ;  $A_s$  — точка предмета;  $A'_s$  — ее изображение, определяемое пересечением преломленного луча с прямой, проходящей через предметную точку и центр преломляющей поверхности.

Ход узкого сагиттального пучка образуется поворотом плоскости фиг. 7 относительно прямой, проходящей через точку предмета, центр поверхности и через точку изображения.

Отрезки от точки преломления луча  $N$  до предмета и изображения обозначим соответственно через  $s$  и  $s'$ .

Опустим из точек  $A_s$  и  $A'_s$  перпендикуляры на нормаль к поверхности в точке  $N$ . Отрезки от предмета до центра поверхности и от изображения до центра обозначим через  $q_s$  и  $q'_s$ .

Из фиг. 7 следует:

$$q_s \cos \gamma = r - s \cos i; \quad -q'_s \cos \gamma = s' \cos i' - r. \quad (63)$$

С другой стороны,

$$q_s \sin \gamma = s \sin i; \quad -q'_s \sin \gamma = -s' \sin i'. \quad (64)$$

Разделив равенства (63) на (64), получим:

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{r - s \cos i}{s \sin i}; \quad \operatorname{ctg} \gamma = \frac{r - s' \cos i'}{s' \sin i'}. \quad (65)$$

Умножая числитель и знаменатель левой части на  $n$ , а правой части на  $n'$  и сокращая на  $n \sin i = n' \sin i'$ , получаем:

$$n \frac{r - s \cos i}{s} = n' \frac{r - s' \cos i'}{s'}, \quad (66)$$

откуда находим окончательное выражение для сагиттального инварианта:

$$n \left[ \frac{1}{s} - \frac{\cos i}{r} \right] = n' \left[ \frac{1}{s'} - \frac{\cos i'}{r} \right]. \quad (67)$$

Формула (67) может быть представлена аналогично меридиональному инварианту:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r}. \quad (68)$$

## § 8. Вывод соотношений для фокусных расстояний одной преломляющей поверхности

Рассмотрим сначала частный случай одной преломляющей поверхности, когда точка преломления главного луча лежит на оси системы.

На фиг. 8  $A_t$  — точка предмета;  $A'_t$  — ее изображение, образованное меридиональными пучками. Углы падения и преломления  $i$  и  $i'$  играют в рассматриваемом случае роль углов  $\beta$  и  $\beta'$ .

Нетрудно установить местонахождение главных плоскостей поверхности. Главные плоскости должны иметь линейное увеличение, равное единице, и должны быть перпендикулярны оси системы; эти условия выполняются в вершине самой преломляющей поверхности (предмет совпадает с изображением и перпендикулярен нормали).

Пользуясь формулой (62) и полагая отрезок  $t$  равным бесконечности, находим заднее фокусное расстояние от главной плоскости  $f'_t$ :

$$\frac{n' \cos^2 i'}{f'_t} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r}, \quad (69)$$

откуда

$$f'_t = \frac{n'r \cos^2 i'}{n' \cos i' - n \cos i}. \quad (70)$$

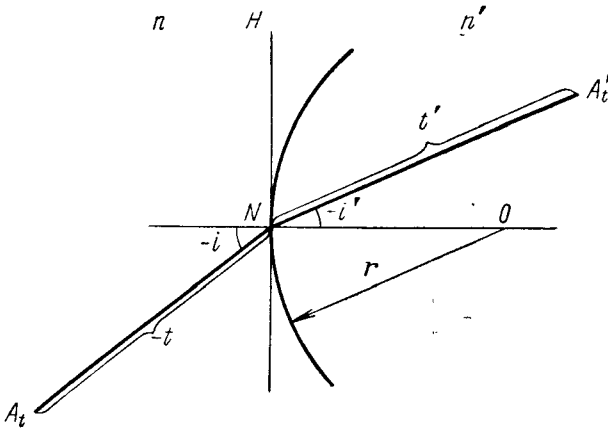
Аналогичным путем, приравнявая отрезок  $t'$  бесконечности, находим переднее главное фокусное расстояние:

$$f_t = -\frac{nr \cos^2 i}{n' \cos i' - n \cos i}. \quad (71)$$

Составим отношение фокусных расстояний от главных точек. Получим

$$-\frac{f_t}{f'_t} = \frac{n \cos^2 i}{n' \cos^2 i'}. \quad (72)$$

Заметим, что хотя в формуле (72) не участвуют в явном виде углы главного луча с осью системы, сама формула справедлива только лишь



Фиг. 8. Преломление луча в вершине поверхности.

для рассмотренного частного случая; когда точка преломления главного луча не будет находиться на оси системы, формула (72) перестает быть справедливой. Отсюда можно сделать вывод, что значения главных фокусных расстояний должны изменяться при изменении положения оси, относительно которой определялись фокусные расстояния поверхности, хотя бы углы падения и преломления главного луча и оставались неизменными.

Рассмотрим теперь фокусные расстояния нашей поверхности от узловых точек.

Пользуясь формулами (20) и (21) для узловых фокусных расстояний и имея в виду, что роль углов  $\beta$  и  $\beta'$  играют углы  $i$  и  $i'$ , находим узловые фокусные расстояния

$$f_t = -\frac{n'r \cos i \cos i'}{n' \cos i' - n \cos i}; \quad (73)$$

$$f'_t = \frac{nr \cos i \cos i'}{n' \cos i' - n \cos i}. \quad (74)$$

Составив отношение фокусных расстояний, получим:

$$\frac{f'_t}{f_t} = -\frac{n}{n'}. \quad (75)$$

Из формулы (75) видно, что отношение узловых фокусных расстояний не зависит от углов главного луча с осью системы.

Однако в данном случае все три формулы для узловых фокусных расстояний остаются справедливыми и при любом другом положении оси, так как узловые точки, лежащие на главном луче, не изменяют своего положения при повороте оси системы.

Это имеет очень большое значение, так как независимость узловых фокусных расстояний от ориентировки оси позволяет их использовать для определения главных фокусных расстояний в тех случаях, когда точка преломления главного луча не будет лежать на оси системы, т. е. тогда, когда будем рассматривать общий случай.

Формулу (75) можно представить в следующем виде:

$$-n'f'_t = nf_t. \quad (76)$$

На основании формул (73), (74), (20) и (21) можно выразить главные фокусные расстояния через узловые фокусные расстояния.

Получим

$$f_t = -\frac{nr \cos i \cos i'}{(n' \cos i' - n \cos i)} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \beta'}; \quad (77)$$

$$f'_t = \frac{n'r \cos i \cos i'}{(n' \cos i' - n \cos i)} \cdot \frac{\cos \beta'}{\cos \beta}. \quad (78)$$

Составляя отношение главных фокусных расстояний, находим для общего случая

$$-\frac{f_t}{f'_t} = \frac{n \cos^2 \beta}{n' \cos^2 \beta'} \quad (79)$$

— выражение, переходящее в формулу (72) в случае, если точка преломления главного луча переходит на ось системы.

Обратимся к инвариантам (25) и (26). Используя формулы (73), (74) и (26), можно исключить фокусные расстояния.

Таким образом, получим следующий инвариант:

$$n' dy'_t \cos \beta'_t d\beta'_t = n dy_t \cos \beta_t d\beta_t, \quad (80)$$

известный под названием теоремы Штраубеля.

Легко показать, что формула (80) представляет собой полный инвариант, распространяющийся на любое число поверхностей, так как все величины, относящиеся к пространству изображения после какой-либо из поверхностей системы, можно рассматривать как величины, относящиеся к пространству предметов перед последующей поверхностью.

Формула (80) будет справедлива не только для одной поверхности, но и для системы из любого числа поверхностей.

Деля формулу (80) на формулу (25), справедливую также для всей системы, приходим к выводу, что формула (79), ранее полученная

для одной преломляющей поверхности, оказывается также справедливой для всей системы.

Разделив формулу (80) на формулу (26), справедливую для всей системы, приходим к выводу о справедливости формул (76) и (75), полученных ранее для одной поверхности, также для всей системы.

### Глава III

#### ОДНА ЛИНЗА В ВОЗДУХЕ

##### § 9. Тонкая линза в воздухе при зрачке, совпадающем с линзой

Для тонкой линзы (фиг. 9) будут иметь место следующие соотношения:

$$n_1 = n_3 = 1; \quad n_2 = n; \quad (81)$$

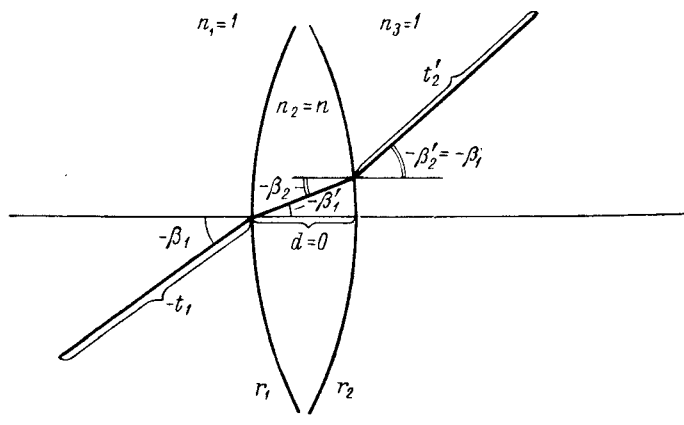
$$\sin \beta_1 = n \sin \beta'_1. \quad (82)$$

Кроме того,

$$-\beta'_1 = -\beta_2, \quad (83)$$

$$t'_1 = t_2; \quad s'_1 = s_2 \quad (84)$$

соответственно для меридионального и сагиттального пучков.



Фиг. 9. Тонкая линза в воздухе.

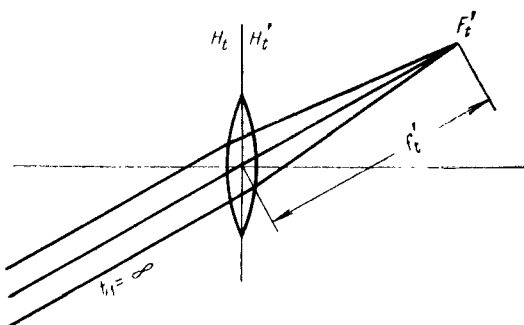
Отсюда следует:

$$-\beta'_2 = -\beta_1. \quad (85)$$

Главные плоскости рассматриваемой линзы, как в этом нетрудно убедиться, должны совпадать с самой линзой.

Действительно, по определению, главные плоскости должны быть перпендикулярны оси системы и иметь увеличение  $V = 1$ ; это будет

возможно только тогда, когда мы поместим предмет в вершине первой поверхности, так как в этом случае изображение предмета после первой поверхности, совпадая с самой первой поверхностью, будет являться



Фиг. 10. Пример определения меридионального фокусного расстояния тонкой линзы.

предметом для второй поверхности и также будет совпадать со второй поверхностью. Так как при этом линейное увеличение в обоих случаях будет оставаться равным единице, то и общее увеличение всей тонкой линзы точно так же окажется равным единице. Для нахождения фокусных расстояний можно пользоваться тем же приемом, что и для нахождения фокусных расстояний для отдельной преломляющей поверхности, т. е., задавая отрезок  $t_1 = \infty$ , определить в этом случае отрезок  $t_2' = f_1'$  (фиг. 10), и, наоборот, задавая отрезок  $t_2' = \infty$ , определить отрезок  $t_1$ , обращаящийся в переднее фокусное расстояние  $f_1$ .

Напишем меридиональный инвариант для первой поверхности нашей линзы, помня, что роль углов  $i_1$  и  $i_1'$  играют углы  $\beta_1$  и  $\beta_1'$  и что первый отрезок  $t_1 = \infty$ :

$$\frac{n_2 \cos^2 \beta_1'}{t_1} = \frac{n_2 \cos \beta_1' - \cos \beta_1}{r_1}. \quad (86)$$

На основании условий (83) и (84) можно написать:

$$\frac{n_2 \cos^2 \beta_2}{t_2} = \frac{n_2 \cos \beta_2 - \cos \beta_1}{r_1}. \quad (87)$$

Напишем теперь меридиональный инвариант для второй поверхности:

$$\frac{\cos^2 \beta_2'}{f_1'} - \frac{n_2 \cos^2 \beta_2}{t_2} = \frac{\cos^2 \beta_2' - n_2 \cos \beta_2}{r_2}. \quad (88)$$

На основании формул (86) и (87) формула (88) может быть переписана в следующем виде:

$$\frac{\cos^2 \beta_1}{f_1'} = \frac{n \cos \beta_2 - \cos \beta_1}{r_1} - \frac{n \cos \beta_2 - \cos \beta_1}{r_2}. \quad (89)$$

или

$$\frac{\cos^2 \beta_1}{f_1'} = (n \cos \beta_2 - \cos \beta_1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (90)$$

Из формулы (90) нетрудно определить оптическую силу линзы вдоль главного луча в меридиональной плоскости:

$$\varphi_l = \frac{1}{f_1'} = \frac{n \cos \beta_2 - \cos \beta_1}{\cos^2 \beta_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (91)$$

Переходя к сагиттальной плоскости (фиг. 11), следует все наши рассуждения, относящиеся к меридиональной плоскости, повторить, приняв вместо меридионального инварианта инвариант сагиттальный.

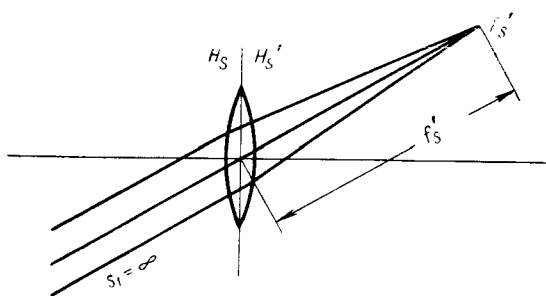
Для первой поверхности получим:

$$\frac{n}{s'_1} = \frac{n \cos \beta_2}{r_1} \cos \beta_1 = \frac{n}{s_2}. \quad (92)$$

Для второй поверхности получим:

$$\frac{1}{f'_s} - \frac{n}{s_2} = \frac{\cos \beta_1 - n \cos \beta_2}{r_2}.$$

(93)



Фиг. 11. Пример определения сагиттального фокусного расстояния тонкой линзы.

Из равенств (92) и (93) можно найти выражение для оптической силы линзы вдоль главного луча в сагиттальной плоскости  $\varphi_s$ :

$$\varphi_s = \frac{1}{f'_s} = \frac{n \cos \beta_2 - \cos \beta_1}{r_1} - \frac{n \cos \beta_2 - \cos \beta_1}{r_2}. \quad (94)$$

И окончательно

$$\varphi_s = \frac{1}{f'_s} = (n \cos \beta_2 - \cos \beta_1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (95)$$

Из формул (91) и (95) можно получить выражение для оптической силы линзы для нулевых лучей, полагая для этого углы  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равными нулю. Находим:

$$\varphi_0 = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (96)$$

Выполнив несложные преобразования формул (91) и (95) с помощью формулы (96), можно получить следующие выражения для оптической силы линзы в меридиональной и сагиттальной плоскостях:

$$\varphi_t = \frac{n \cos \beta_2 - \cos \beta_1}{n - 1} \cdot \frac{\varphi_0}{\cos^2 \beta_1} = \frac{\varphi_s}{\cos^2 \beta_1}; \quad (97)$$

$$\varphi_s = \frac{n \cos \beta_2 - \cos \beta_1}{n - 1} \varphi_0. \quad (98)$$

Отсюда легко получить выражение, связывающее меридиональное и сагиттальное фокусные расстояния:

$$f'_t = f'_s \cos^2 \beta_1 \quad (99)$$

для случая тонкой линзы при зрачке, совпадающем с самой линзой.

Величина фокусных расстояний вдоль луча оказывается совершенно не зависящей от формы линзы (от ее радиусов кривизны) при любых углах главного луча с осью системы.

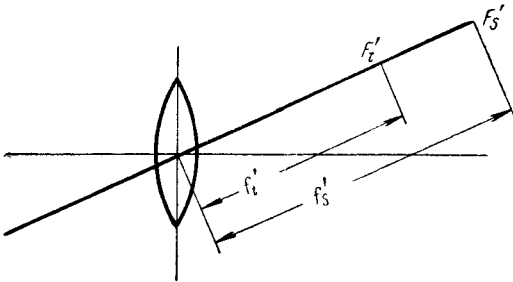
Нетрудно определить и величину астигматизма такой тонкой линзы (фиг. 12).

Составляя разность фокусных расстояний  $f'_t$  и  $f'_s$  вдоль луча, получаем на основании формулы (99) астигматическую разность

$$f'_t - f'_s = -f'_s \sin^2 \beta_1. \quad (100)$$

Очевидно, что в случае малого поля зрения формула (100) переходит в известное из теории aberrаций третьего порядка выражение

$$f'_t - f'_s = -f'_0 \beta^2. \quad (101)$$

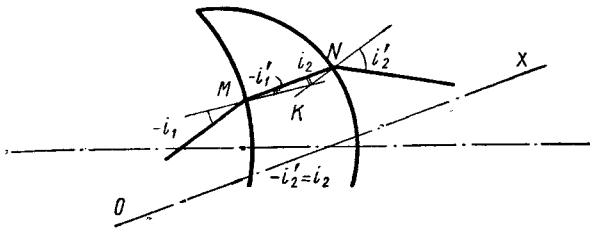


Фиг. 12. Расположение меридионального и сагиттального фокусон у тонкой линзы.

### § 10. Случай линзы с острым краем, работающей в положении наименьшего отклонения луча

Этот случай иначе можно определить следующими условиями:

- а) главный луч образует с нормальными к обеим поверхностям углы, одинаковые по величине, но различные по знакам (фиг. 13);
- б) расстояние между точками преломления главного луча на поверхностях линзы  $M$  и  $N$  равно нулю.



Фиг. 13. Пример преломления луча на остром крае линзы.

Следовательно, можно написать:

$$-i'_1 = i_2; \quad -i_1 = i'_2. \quad (102)$$

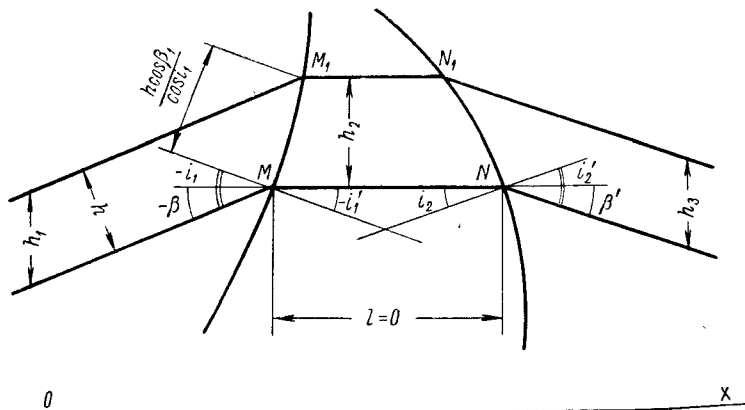
Естественно ожидать, что окажутся справедливыми ранее полученные формулы для тонкой линзы, совпадающей со своим зрачком, так как косинусы углов не изменят своих знаков при изменении знаков углов. Однако, если учесть принятое определение понятия главных фокусных расстояний, то окажется необходимым найти сначала положение главных плоскостей.

С этой целью воспользуемся некоторой вспомогательной осью, параллельной ходу главного луча внутри линзы между точками  $M$  и  $N$ ,



Обратимся к фиг. 14, на которой  $OX$  — ось, параллельная главному лучу  $MN$  внутри линзы. Параллельно главному лучу направим в нашу линзу второй луч  $M_1N_1$ , бесконечно близкий к первому лучу (в меридиональной плоскости).

Пусть ширина пучка будет равна  $h$  (перпендикулярно входящему лучу). Определим сечение пучка перпендикулярно оси  $OX$  до и после нашей линзы, пренебрегая величинами 2-го порядка малости. Из фиг. 14 следует:



Фиг. 14. Пример преломления пучка лучей на остром крае линзы.

$$h_1 = \frac{h}{\cos \beta}. \quad (103)$$

Выразим отрезок  $MM_1$  через  $h$  и  $h_2$ . Получим:

$$MM_1 = \frac{h}{\cos i_1} = \frac{h_2}{\cos i_1'}, \quad (104)$$

откуда легко найти отношение отрезков  $h_1$  и  $h_2$ :

$$h_2 = h_1 \frac{\cos i_1'}{\cos i_1} \cos \beta. \quad (105)$$

Аналогичным образом можно выразить отрезок  $h_2$  через  $h_3$ . Находим:

$$h_2 = h_3 \frac{\cos i_2}{\cos i_2'} \cos \beta' = h_3 \frac{\cos i_1'}{\cos i_1} \cos \beta. \quad (106)$$

Исходя из равенств (105) и (106), можно заключить, что если предмет совпадает с острым краем линзы, то и изображение также совпадает с острым краем, причем величина изображения будет равна величине предмета, т. е. главные плоскости совпадут друг с другом и с острым краем линзы.

Поэтому при определении главных фокусных расстояний относительно вспомогательной оси  $OX$ , отличной от оси самой линзы и параллельной ходу главного луча между поверхностями, можно воспользоваться расстояниями от острого края линзы до соответствующих фокусов.

Для этих фокусных расстояний можно написать:

$$\frac{1}{f_t} = \frac{n \cos i'_1 - \cos i_1}{\cos^2 i_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right); \quad (107)$$

$$\frac{1}{f_t} = \frac{n \cos i'_1 - \cos i_1}{\cos^2 i_1} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = -\frac{1}{f'_t}. \quad (108)$$

Аналогично для сагиттальных фокусных расстояний

$$\frac{1}{f_s} = (n \cos i'_1 - \cos i_1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right); \quad (109)$$

$$\frac{1}{f_s} = (n \cos i'_1 - \cos i_1) \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = -\frac{1}{f'_s}. \quad (110)$$

Пользуясь формулами (107) — (110) и формулами (20) и (21), можно определить узловые фокусные расстояния. Следует иметь в виду, что в исходных формулах (20) и (21) роль углов  $\beta$  и  $\beta'$  будут играть углы  $i_1 - i_1'$  и  $i_2 - i_2'$  с вспомогательной осью в отличие от углов  $\beta_1$  и  $\beta_3$  с осью самой системы.

В случае необходимости определения главных фокусных расстояний относительно оси самой системы можно проделать обратный переход по формулам (20) и (21); однако при этом роль углов  $\beta$  и  $\beta'$  будут играть уже углы главного луча с осью самой системы в отличие от ранее применявшихся углов с вспомогательной осью.

## § 11. Объектив Гипергон

Особый интерес представляет частный случай, когда линза с острым краем имеет равные радиусы. В теории аберраций 3-го порядка этот случай удовлетворяет известному условию Пецваля, определяющему отсутствие кривизны поля при исправленном астигматизме.

Из выведенных формул видно, что линза с острым краем будет иметь фокусные расстояния, равные бесконечности.

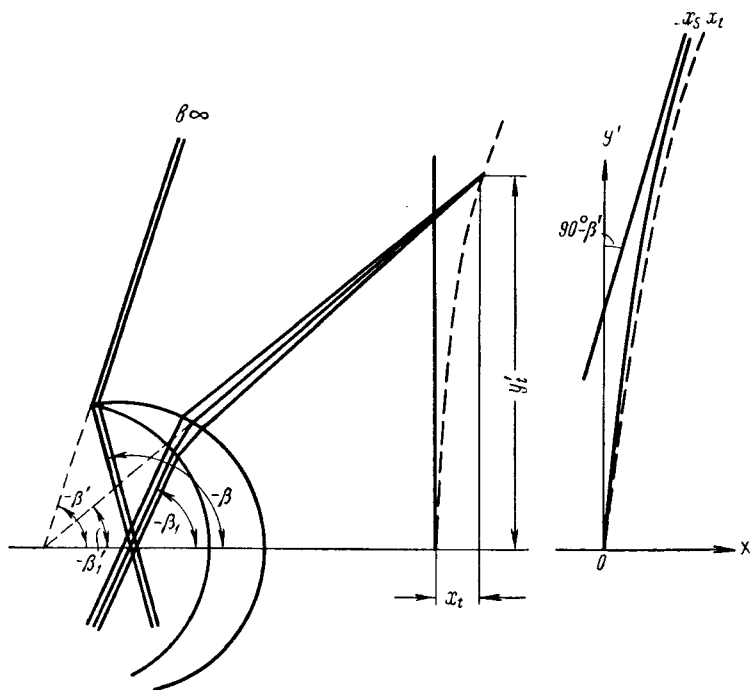
Из фиг. 15 нетрудно установить, что главный луч под острым краем внутри линзы с равными радиусами будет перпендикулярен оси самой линзы; таким образом, наша вспомогательная ось также окажется перпендикулярной оси системы.

Входящий в линзу главный луч, равно отклоняемый острым краем, составит с осью линзы угол больший  $90^\circ$ ; однако угол выходящего главного луча с осью линзы будет меньше  $90^\circ$ .

Поэтому, если бы мы стали строить графики полевых аберраций относительно выходного угла, то кривизна поля на краю поля зрения получилась бы бесконечно большой, так как фокусы меридиональных и сагиттальных пучков будут лежать в бесконечности (выходящие пучки будут параллельными).

Однако физически получится несколько иная картина. Меридиональный и сагиттальный фокусы будут лежать в бесконечности, но на бесконечно большом изображении, так как угол выходящего из нашей линзы главного луча отличается от угла в  $90^\circ$  на конечную величину.

В силу этого поверхности изображения, как меридиональная, так и сагиттальная, будут приближаться к рассматриваемому главному лучу как к асимптоте.



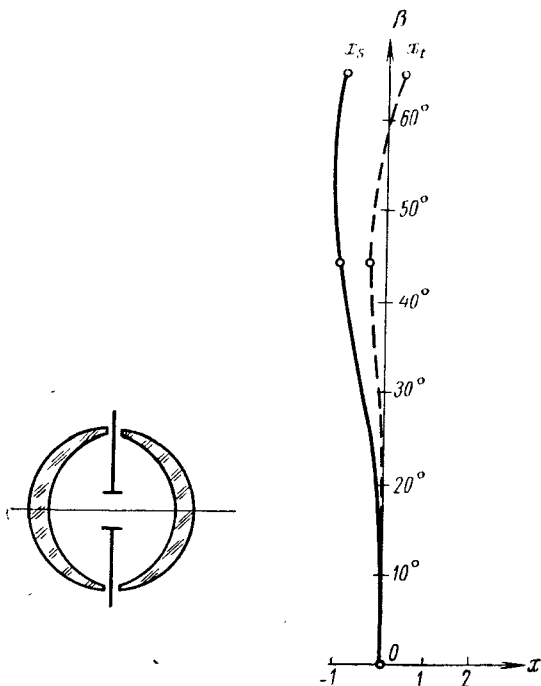
Фиг. 15. Преломление пучка на остром крае линзы с равными радиусами поверхностей.

Имея в виду, что угол выходящего главного луча с осью системы мало отличается от угла в  $90^\circ$ , приходим к выводу, что искривление поверхности изображения для линзы с равными радиусами будет сравнительно невелико.

В одной из работ автора<sup>1</sup> указано, что в случае наличия малых углов главного луча с нормальными к преломляющим поверхностям условие Пецваля оказывается справедливым для полей зрения, выходящих из области теории aberrаций третьего порядка. Настоящие же результаты приводят к тому, что при очень больших полях условие Пецваля не может служить гарантией полного отсутствия кривизны поля, однако и при соблюдении условия Пецваля

<sup>1</sup> М. М. Русинов, «Оптико-механическая промышленность», ВООМП, 1934.

возможны отступления от плоскости изображения. Как видно из рассмотренного примера, в данном случае будет иметь место небольшая положительная кривизна поля, для исправления которой условие Пецваля может быть соответственно нарушено.



Фиг. 16. Объектив Гипергон.

В известном широкоугольном фотообъективе Гипергон<sup>1</sup>, обладающем полем зрения  $2\beta = 135^\circ$  и построенном из двух линз с одинаковыми радиусами, для лучшего исправления кривизны поля равенство радиусов несколько нарушается.

Схема объектива Гипергон и графики его аберраций показаны на фиг. 16.

Данные объектива Гипергон:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= 8,57 & d_1 &= 2,21 & n_2 &= 1,5105 \\
 r_2 &= 8,63 & d_2 &= 13,78 & n_3 &= 1 \\
 r_3 &= -8,63 & d_3 &= 2,21 & n_4 &= 1,5105 \\
 r_4 &= -8,57 & & & & \\
 f'_0 &= 102,66; & s'_0 &= 92,42
 \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Г. Г. Слюсарев, Методы расчета оптических систем, ОНТИ, 1937.

Рассматривая данные объектива, мы видим, что равенство радиусов в системе нарушено, что потребовалось для введения отрицательной кривизны поля зрения.

При рассмотрении графиков аберраций объектива можно видеть тенденцию астигматических кривых уходить в сторону положительных значений на краю поля зрения.

Оба положения полностью подтверждают правильность наших теоретических выводов.

В выполненном ранее выводе мы воспользовались рассмотрением луча, проходящего через острый край линзы. Этот прием в значительной степени упрощает рассмотрение явлений, происходящих в системе, аналогично тому, как в теории аберраций третьего порядка для упрощения выводов прибегают к рассмотрению бесконечно тонких линз.

Метод острого края дает лучшее приближение к реальной системе, так как всегда можно рассматривать систему с несколько большим полем, чем требуется в действительности; в таких случаях при переходе к заданному полю (или апертуре) получается реальная система.

## § 12. Концентричные линзы

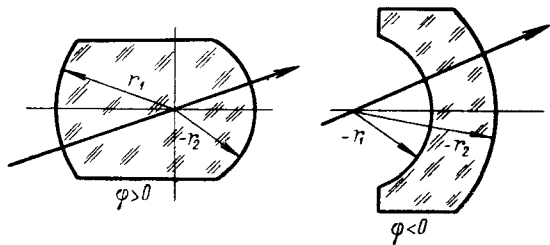
Рассмотрим вопрос о существовании линз, свободных от астигматизма. Наиболее простыми, очевидно, явятся те случаи, когда обе поверхности линз свободны от астигматизма.

Ясно, что если главный луч будет пересекать преломляющую поверхность по направлению ее нормали, все косинусы углов, входящие в формулы для фокусных расстояний, сделаются равными единице, что приведет к равенству меридиональных и сагиттальных фокусных расстояний.

Строя линзы из двух таких поверхностей, получим две формы концентричных линз — положительную и отрицательную.

Изучение свойств таких линз может быть произведено на основании формул для нулевых лучей.

Обе формы концентричных линз показаны на фиг. 17.



Фиг. 17. Концентрические линзы.

## § 13. Линзы с апланатическими поверхностями

Перейдем к рассмотрению линз, у которых одна или обе поверхности не являются концентричными.

Обратимся к меридиональному и сагиттальному инвариантам. Имеем:

$$\frac{n' \cos^2 i'}{t'} - \frac{n \cos^2 i}{t} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r}; \quad (111)$$

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r}. \quad (112)$$

Поставим следующее условие:  $s' = t'$  в случае, если  $s = t$ . Иными словами, если предмет свободен от астигматизма, то и изображение также должно быть свободно от астигматизма.

Заменяя в формуле (111) величины  $t$  на величины  $s$  и имея в виду, что и в формулах (111) и (112) правые части равны друг другу, можно написать:

$$\frac{n' \cos^2 i'}{s'} - \frac{n \cos^2 i}{s} = \frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} \quad (113)$$

или

$$\frac{n' \cos^2 i'}{s'} - \frac{n'}{s'} = \frac{n \cos^2 i}{s} - \frac{n}{s}. \quad (114)$$

Отсюда

$$\frac{n' \sin^2 i'}{s'} = \frac{n \sin^2 i}{s}. \quad (115)$$

Или после некоторых сокращений, выполненных с учетом закона преломления,

$$\frac{1}{n's'} = \frac{1}{ns}; \quad n's' = ns. \quad (116)$$

На основании формулы (112) находим:

$$\frac{n'^2}{n's'} - \frac{n^2}{ns} = \frac{n'^2 - n^2}{ns} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r} = \frac{n'^2 - n^2}{n's'}. \quad (117)$$

В случае  $i = i' = 0$  формула (117) переходит после сокращения на  $n' - n$  к виду:

$$\frac{n' + n}{ns} = \frac{1}{r} = \frac{n' + n}{n's'}, \quad (118)$$

определяющему, как известно, положение апланатических точек.

Пользуясь формулой (111), можно представить формулу (117) в следующем виде:

$$\frac{n'^2 \cos^2 i' - n^2 \cos^2 i}{n's'} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r} = \frac{n'^2 \cos^2 i' - n^2 \cos^2 i}{ns} \quad (119)$$

и после сокращения получить:

$$\frac{n' \cos i' + n \cos i}{n's'} = \frac{1}{r} = \frac{n' \cos i' + n \cos i}{ns}. \quad (120)$$

Из формулы (120) следует:

$$n's' = (n' \cos i' + n \cos i) r = ns. \quad (121)$$

Разделив равенство (121) на  $n \sin i = n' \sin i'$ , найдем:

$$\frac{s}{\sin i} = \frac{n' \cos i' + n \cos i}{n \sin i} r = \left[ \frac{1}{\operatorname{tg} i'} + \frac{1}{\operatorname{tg} i} \right] r = \frac{s'}{\sin i'} \quad (122)$$

или после некоторых преобразований получаем:

$$s \sin i' = s' \sin i = r \sin(i + i'). \quad (123)$$

На фиг. 18 даны следующие обозначения:  $O$  — центр преломляющей поверхности радиуса  $r$ ;  $N$  — точка преломления падающего

луча на поверхности;  $s$  — отрезок до предметной точки;  $s'$  — отрезок до точки изображения; предмет и изображение анастигматичны;  $i$  и  $i'$  — углы падения и преломления.

Из фигуры следует:

$$r \sin(i - u) = -s \sin u. \quad (124)$$

Сопоставляя формулы (124) и (123), можно убедиться, что угол  $u$  есть не что иное, как угол  $i'$ , взятый с обратным знаком. Аналогично можно доказать равенство углов  $u'$  и  $-i$ . Таким образом, получаем:

$$u = -i'; \quad u' = -i. \quad (125)$$

Из формулы (125) следует, что точки  $A$  и  $A'$  предмета и изображения лежат на прямой, проходящей через центр преломляющей поверхности  $O$ .

Пользуясь формулами (125), можно определить расстояния  $-q$  и  $-q'$  точек  $A$  и  $A'$  от центра поверхности  $O$ ; действительно, на основании формулы (125) и формулы для отношения сторон в треугольнике следует:

$$-q \sin u = -r \sin i; \quad -q' \sin u' = -r \sin i' \quad (126)$$

или

$$q = -r \frac{\sin i}{\sin i'} = -\frac{n'}{n} r; \quad q' = -\frac{n}{n'} r. \quad (127)$$

Формула (127) показывает, что расстояния точек  $A$  и  $A'$  от центра поверхности  $O$  не зависят от углов падения и преломления  $i$  и  $i'$ ; найденные значения показывают, что точки  $A$  и  $A'$  суть апланатические.

#### § 14. Определение сагиттальных и меридиональных фокусных расстояний на главном луче, проходящем через острый край линзы

Обратимся к сагиттальному инварианту [формула (68)]. Определим сагиттальные фокусные расстояния, последовательно удаляя то точку предмета, то точку изображения в бесконечность. Находим:

$$f'_s = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r} = -\frac{n}{f_s}, \quad (128)$$

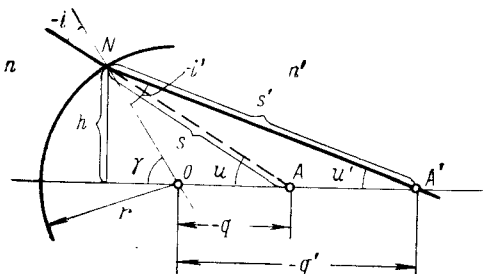
откуда на основании формул (31) и (32) получаем:

$$\frac{n'}{n} = -\frac{f'_s}{f_s} = -\frac{f_s}{f'_s}. \quad (129)$$

Пользуясь формулами (129) и (33), находим:

$$n' dy'_s d\beta'_s = n dy_s d\beta_s \quad (130)$$

— выражение, являющееся инвариантом.



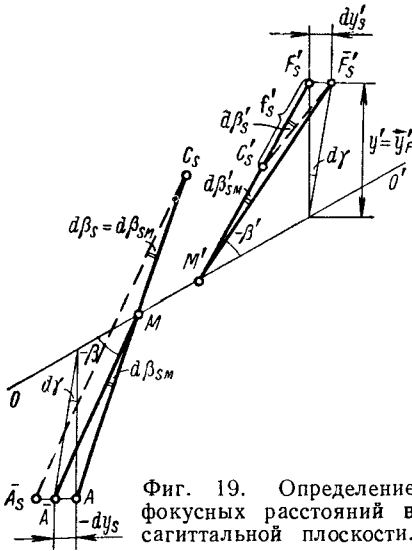
Фиг. 18. Работа апланатической поверхности.

Применив полученный инвариант ко всей системе и разделив его на формулу (33), получим:

$$\frac{n'}{n} = -\frac{f'_s}{f_s} = -\frac{f'_s}{f_s}; \quad (131)$$

формула (131) аналогична по виду формуле (129) и справедлива не только для одной преломляющей поверхности, но для всей системы.

Определим фокусные расстояния в сагиттальной плоскости. На фиг. 19 имеем:  $M'F'_s$  — ход главного луча; ход сагиттального луча образуется, как обычно, поворотом меридиональной плоскости на некоторый малый угол  $d\gamma$  вокруг оси системы;  $OO'$  — оптическая ось системы;  $dy'_s$  — элементарное сагиттальное изображение в сагиттальной фокальной поверхности;  $y'$  — расстояние элементарного изображения от оси системы;  $d\beta_{sM}$  и  $d\beta'_{sM}$  — углы между главным и сагиттальными лучами в сагиттальной плоскости;  $C_s$  и  $C'_s$  — узловые сагиттальные точки.



Фиг. 19. Определение фокусных расстояний в сагиттальной плоскости.

Из фигуры следует:

$$dy'_s = y' d\gamma. \quad (132)$$

Кроме того,

$$d\beta_{sM} = d\gamma \sin \beta; \quad d\beta'_{sM} = d\gamma \sin \beta'. \quad (133)$$

Из формулы (133) легко определить угловое увеличение  $W_{sM}$  в точках  $M$  и  $M'$ :

$$W_{sM} = \frac{d\beta'_{sM}}{d\beta_{sM}} = \frac{\sin \beta'}{\sin \beta}. \quad (134)$$

Из формул (132) и (133) следует:

$$f'_s = \frac{dy'_s}{d\beta'_s} = \frac{y'_s F'}{\sin \beta'} = -f_s; \quad f_s = \frac{y'_s F}{\sin \beta} = -f'_s, \quad (135)$$

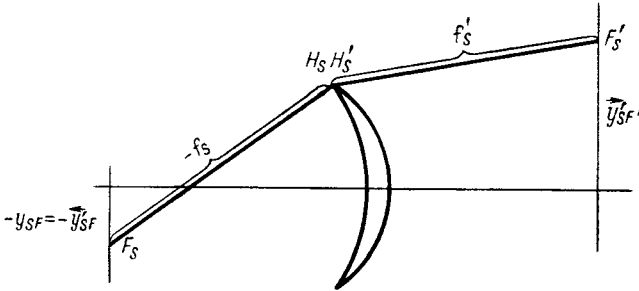
где угол  $d\beta'_s = d\beta_s = d\beta_{sM}$  (так как лучи  $C'_s F'_s$  и  $M' F'_s$  пересекаются в задней сагиттальной фокальной плоскости, то в пространстве предметов сопряженные с ними лучи  $A_s C_s$  и  $\bar{A} M$  должны быть параллельны друг другу, откуда и следует равенство углов  $d\beta_s$  и  $d\beta_{sM}$ ), а величина  $y'_s F$  есть не что иное, как величина изображения в передней фокальной плоскости при обратном ходе главного луча.

Обратимся к случаю острого края линзы в воздухе. В этом случае главные сагиттальные линии лежат на остром крае линзы; согласно формуле (131), главные фокусные расстояния становятся равными узловым фокусным расстояниям.



При этом узловые точки совпадают с главными точками.

Вид линзы в воздухе, имеющей острый край, показан на фиг. 20. Ввиду равенства фокусных расстояний (переднего и заднего) расстояния от острого края до переднего и заднего элементарных фокальных изображений должны быть равны друг другу.



Фиг. 20. Главные точки в сагиттальной плоскости для линзы с острым краем.

Из формул (135) можно получить соотношения между величинами  $\vec{y}_{sF'}$  и  $\vec{y}_{sF}$  и  $\sin \beta$  и  $\sin \beta'$ . Находим

$$\frac{\vec{y}_{sF'}}{\sin \beta} = -\frac{\vec{y}_{sF}}{\sin \beta'} \quad (136)$$

или

$$\vec{y}_{sF'} \sin \beta' = -\vec{y}_{sF} \sin \beta. \quad (137)$$

Пользуясь дважды формулами (128) и (131), находим для линзы с острым краем в воздухе:

$$\frac{1}{f'_s} = \frac{n_2 \cos i'_1 - \cos i_1}{r_1} + \frac{\cos i_2 - n_2 \cos i_2}{r_2} = -\frac{1}{f_s}, \quad (138)$$

имея в виду, что  $n_1 = n_3 = 1$  и отрезок  $s_2 = s'_1$ .

Для случая равноотклоняющей линзы, когда углы  $-i_1 = i'_2$  и  $i'_1 = -i_2$ , получаем известную нам формулу

$$\frac{1}{f'_s} = (n \cos i_2 - \cos i_1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (139)$$

Рассматривая острый край линзы в воздухе, можно выбрать такое положение вспомогательной оси, когда углы главного луча с вспомогательной осью будут равны друг другу по величине и обратны по знаку, т. е. так, чтобы имело место  $\beta = -\beta'$ .

В этом случае  $\cos \beta$  будет равен  $\cos \beta'$  и в формулах для узловых точек в меридиональной плоскости можно будет сделать сокращения.

Получаем:

$$W_t V_t = -\frac{f_t \cos \beta'}{f'_t \cos \beta} = -\frac{f_t}{f'_t}. \quad (140)$$

Из формул (20) и (21) следует:

$$f'_t = -f_t \frac{\cos \beta'}{\cos \beta} = -f_t; \quad f_t = -f'_t \frac{\cos \beta}{\cos \beta'} = -f'_t. \quad (141)$$

Пользуясь формулой (23), можно выразить произведение из углового и линейного увеличений через узловые фокусные расстояния:

$$V_t W_t = -\frac{f'_t}{f_t} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \beta'} = -\frac{f'_t}{f_t}. \quad (142)$$

Формулы (140) и (141) аналогичны по внешнему виду формулам (29), (31) и (32) для сагиттальных пучков.

В случае, если система находится в воздухе,  $f'_t = -f_t$ , и на основании этой формулы (29) и (142) значительно упрощаются:

$$V_t W_t = 1; \quad V_s W_s = 1. \quad (143)$$

Как показано ранее, для острого края линзы в воздухе главные и узловые сагиттальные точки совпадают друг с другом и с острым краем самой линзы; однако для меридиональной плоскости на остром крае линзы угловое увеличение в общем случае уже не будет равно единице; очевидно, что и линейное увеличение в меридиональной плоскости не будет равно единице.

Перейдем к определению углового увеличения на остром крае линзы в меридиональной плоскости. На фиг. 21 показан ход главного луча, преломленного обеими поверхностями рассматриваемой линзы; нетрудно установить зависимость между углами  $i'_1$  и  $i_2$ ; находим:

$$-i'_1 + i_2 = \alpha = \text{const}. \quad (144)$$

Дифференцируя логарифмически дважды (для каждой из поверхностей) закон преломления, получаем:

$$\frac{di_1}{\text{tg } i_1} = \frac{di'_1}{\text{tg } i'_1}; \quad \frac{di_2}{\text{tg } i_2} = \frac{di'_2}{\text{tg } i'_2}. \quad (145)$$

Дифференцируя затем формулу (144), определяем зависимость между дифференциалами  $di_1$  и  $di_2$ :

$$di'_1 = di_2. \quad (146)$$

Исходя из формул (146) и (145), можно получить отношение дифференциалов  $di_2$  и  $di_1$ , представляющее собой не что иное, как искомое угловое увеличение в меридиональной плоскости  $W_t$ .

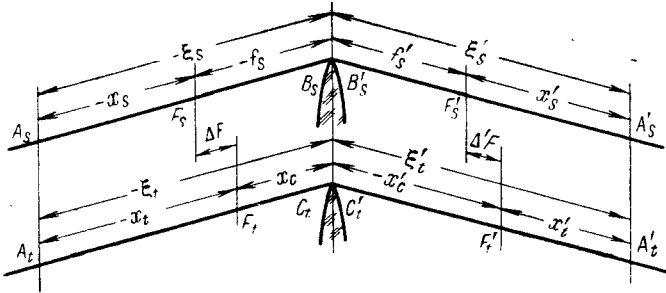
Имеем

$$W_t = \frac{di'_2}{di_1} = \frac{\text{tg } i'_2 \text{ tg } i'_1}{\text{tg } i_2 \text{ tg } i_1}. \quad (147)$$

Перейдем к совместному рассмотрению хода сагиттальных и меридиональных пучков для главного луча, проходящего через острый

край линзы в воздухе. Зададимся условием отсутствия астигматизма. Тогда предмет и изображение как для сагиттальной, так и для меридиональной плоскостей должны совпадать друг с другом; на остром крае предмет и изображение также точно будут совпадать с самим острым краем.

На фиг. 22 имеются следующие обозначения:  $A_s$  и  $A'_s$  — соответственно предмет и изображение для сагиттальной плоскости;  $A_t$  и  $A'_t$  — предмет и изображение для меридиональной плоскости;  $F_s, F_t$  и  $F'_s, F'_t$  — передние и задние фокусы;  $B_s$  и  $B'_s$  — главные и узловые точки для сагиттальной плоскости, совпадающие с точками  $C_t$  и  $C'_t$  для меридиональной плоскости и острым краем линзы. Заметим, что



Фиг. 22. Пример определения условия отсутствия астигматизма на остром крае линзы.

точки  $C_t$  и  $C'_t$  в меридиональной плоскости уже не будут главными точками.

Отрезки  $\xi_s$  и  $\xi'_s$  в сагиттальной плоскости соответственно равны таковым и в меридиональной плоскости, так как все эти отрезки определяются расстоянием от острого края до предмета и изображения.

В сагиттальной плоскости отрезки от острого края до фокусов будут сагиттальными фокусными расстояниями; в меридиональной же плоскости отрезки от фокусов до острого края уже не будут фокусными расстояниями, а будут лишь обычными отрезками от фокусов до пары сопряженных точек, лежащих на остром крае нашей линзы.

Пользуясь формулой (40) для продольного увеличения в сагиттальной и меридиональной плоскостях и помня, что линза находится в воздухе, вследствие чего передние и задние фокусные расстояния равны друг другу по абсолютной величине и имеют обратные знаки, можно приравнять оба выражения для продольного увеличения (в силу равенства отрезков  $\xi_s$  и  $\xi_t$  и отрезков  $\xi'_s$  и  $\xi'_t$ ). Таким образом, получаем:

$$Q_s = Q_t = V_s V_{sB} = V_t V_{tC}. \quad (148)$$

Имея в виду, что сагиттальное линейное увеличение на остром крае линзы  $V_{sB} = 1$ , находим линейное увеличение  $V_t$  в меридиональной плоскости:

$$V_t = \frac{V_s}{V_{tC}} = V_s W_C \quad (149)$$

Займемся установлением зависимости между сагиттальным линейным увеличением для предмета и изображения и расхождением положения фокусов для меридиональной и сагиттальной плоскостей (условием анастигматичности).

Выразим величины отрезков в меридиональной плоскости через величины отрезков, лежащих в сагиттальной плоскости. Из фиг. 22 следует:

$$\left. \begin{aligned} -x_t &= -x_s + \Delta_F; & x'_t &= x'_s - \Delta'_F \\ x_c &= -f_s - \Delta_F; & -x'_c &= f'_s + \Delta'_F \end{aligned} \right\} \quad (150)$$

Пользуясь формулой Ньютона, получаем

$$\begin{aligned} -x_t x'_t &= -f_t f'_t = -x_c x'_c = -(x_s - \Delta_F)(x'_s - \Delta'_F) = \\ &= -(f_s + \Delta_F)(f'_s + \Delta'_F); \end{aligned} \quad (151)$$

раскрывая скобки и помня, что в сагиттальной плоскости  $x_s x'_s = f_s f'_s$ , находим

$$(x_s + f_s) \Delta'_F = -(x'_s + f'_s) \Delta_F. \quad (152)$$

Величины  $x_s$  и  $x'_s$  можно выразить через линейное сагиттальное увеличение для предмета и изображения; действительно, вынося за скобки величины  $f_s$  и  $f'_s$ , после сокращений получаем

$$\frac{f'_s + x'_s}{f_s + x_s} = -\frac{\Delta'_F}{\Delta_F} = \frac{f'_s(1 - V_s)}{f_s(V_s - 1) \frac{1}{V_s}} = -\frac{f'_s}{f_s} V_s \quad (153)$$

и окончательно, если система в воздухе,

$$-\frac{\Delta'_F}{\Delta_F} = V_s. \quad (154)$$

Формула (154) позволяет сделать следующие выводы.

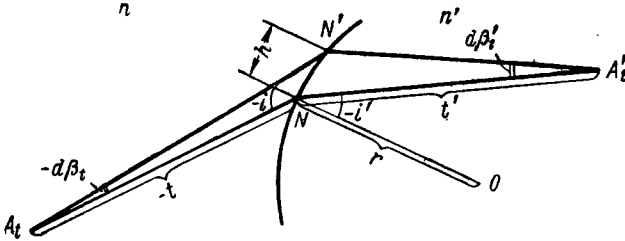
1. При любом ходе главного луча через острый край линзы в воздухе всегда можно найти такое положение предмета, когда изображение будет свободно от астигматизма; при этом линейные увеличения в сагиттальной и меридиональной плоскостях не будут равны друг другу.

2. Для отсутствия астигматизма при произвольном положении предмета необходимо, чтобы главные точки в меридиональной и сагиттальной плоскостях совпадали с острым краем линзы; кроме того, должно соблюдаться равенство сагиттальных и меридиональных фокусных расстояний. Оба условия приводят к необходимости хода главного луча нормально к обеим поверхностям линзы, т. е. к случаю хода главного луча по оптической оси.

ФОРМУЛЫ ПЕРЕХОДА ОТ ОДНОЙ ПРЕЛОМЛЯЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ  
К ДРУГОЙ

§ 15. Формулы перехода в меридиональной плоскости

Решить задачу последовательного перехода от одной поверхности системы к другой можно, пользуясь меридиональным инвариантом и расстоянием между поверхностями системы вдоль главного луча аналогично последовательному применению инварианта Аббе для просчета нулевого луча через систему.



Фиг. 23. Пример вывода формул перехода от одной поверхности к другой.

Этот способ не выгоден однако тем, что он в значительной степени усложняет задачу определения фокусных расстояний; поэтому на практике для определения хода нулевого луча пользуются формулами, допускающими одновременное нахождение как отрезков, так и фокусных расстояний, используя метод определения высот нулевого луча на поверхностях системы.

Этот метод может быть с успехом развит и для определения хода меридионального пучка лучей.

Обратимся к фиг. 23, на которой показан ход главного луча через преломляющую поверхность оптической системы. Здесь  $A_t$  — предметная точка в меридиональной плоскости;  $N$  — точка преломления главного луча;  $N'$  — точка преломления луча, идущего в меридиональной плоскости под малым углом  $d\beta_t$  к главному лучу;  $h$  — высота между обоими лучами на нашей преломляющей поверхности;  $i$  и  $i'$  — углы падения и преломления главного луча;  $A_i'$  — точка изображения в меридиональной плоскости;  $r$  — радиус кривизны преломляющей поверхности;  $t$  и  $t'$  — отрезки до предмета и изображения.

Определяем углы  $d\beta_t$  и  $d\beta_i'$ . Находим:

$$\frac{h \cos i}{t} = d\beta_t; \quad \frac{h \cos i'}{t'} = d\beta_i'. \quad (155)$$

Пользуясь меридиональным инвариантом [формула (62)], можем написать, умножая равенство (62) на высоту  $h$ :

$$n' \cos i' d\beta_i' - n \cos i d\beta_t = \frac{h}{r} (n' \cos i' - n \cos i) \quad (156)$$

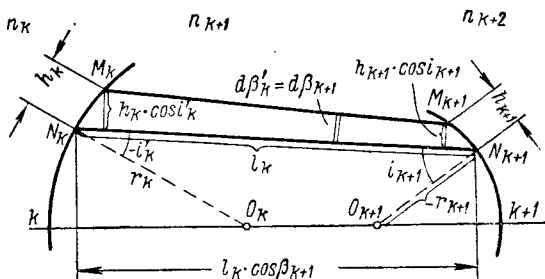
или

$$n' \cos i' d\beta_i = n \cos i d\beta_i + \frac{h}{r} (n' \cos i' - n \cos i). \quad (157)$$

В случае, если углы  $i$  и  $i'$  малы, формула (157) переходит в хорошо известную формулу для нулевых лучей:

$$n'\beta' = n\beta + \frac{h}{r} (n' - n). \quad (158)$$

Займемся переходом от одной преломляющей поверхности к другой. Обратимся к фиг. 24, на которой показан ход главного луча между двумя преломляющими поверхностями оптической системы. Главный луч пересекает обе преломляющие поверхности в точках



Фиг. 24. Пример определения высот пучка лучей на поверхности линз в меридиональной плоскости.

$N_k$  и  $N_{k+1}$ . В точках  $M_k$  и  $M_{k+1}$  обе преломляющие поверхности пересекаются лучом, идущим в меридиональной плоскости вблизи от главного луча.

Расстояние вдоль главного луча между точками  $N_k$  и  $N_{k+1}$  обозначим через  $l_k$ ; радиусы кривизны преломляющих поверхностей обозначим соответственно через  $r_k$  и  $r_{k+1}$ . Высоты на поверхностях обозначим через  $h_k$  и  $h_{k+1}$ ; углы падения и преломления — через  $i'_k$  и  $i_{k+1}$ . Угол главного луча с осью системы между обеими поверхностями назовем  $\beta_{k+1}$ .

Проектируя высоты  $h_k$  и  $h_{k+1}$  на плоскости, перпендикулярные главному лучу, получаем следующие соотношения:

$$h_k \cos i'_k - h_{k+1} \cos i_{k+1} = l_k d\beta_{k+1}, \quad (159)$$

откуда

$$h_{k+1} \cos i_{k+1} = h_k \cos i'_k - l_k d\beta_{k+1}. \quad (160)$$

При малых углах  $i'_k$  и  $i_{k+1}$  формула (160) переходит в хорошо известную для нулевых лучей формулу:

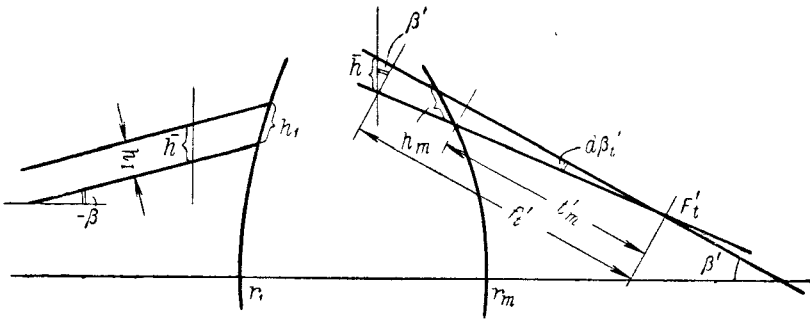
$$h_{k+1} = h_k - l_k d\beta_{k+1}. \quad (161)$$

Формулы (157) и (160) аналогично известным формулам для нулевых лучей позволяют осуществить переход через любое число преломляющих поверхностей при последовательном определении по формулам (157) величин  $d\beta_i$  и по формулам (160) высот  $h$ .

Задавая перед системой входной элементарный угол  $d\beta_t$  и высоту  $h$ , можем определить выходной элементарный угол  $d\beta'_{im}$  и выходную высоту  $h_m$ ; иными словами, всегда можно связать ход элементарного меридионального пучка до и после системы.

**§ 16. Определение фокусного расстояния вдоль главного луча и расстояния от последней преломляющей поверхности до фокуса**

На фиг. 25 показан ход меридионального пучка лучей, входящего в систему параллельно главному лучу, составляющему с осью системы некоторый угол  $\beta$ . Пусть ширина нашего пучка будет  $h_I$ ; угол падения на первую преломляющую поверхность будет равен  $i_1$ . Высоты на первой и последней поверхностях системы пусть будут равны  $h_1$  и  $h_m$ ; меридиональный фокус будем полагать находящимся в точке  $F'_t$ ,



Фиг. 25. Пример определения меридионального фокусного расстояния вдоль главного луча.

на расстоянии от последней преломляющей поверхности, равном  $t'_m$ . Угол сходимости меридионального пучка по выходе из системы обозначим через  $d\beta'_t$ ; угол наклона выходящего главного луча с осью пусть будет равен  $\beta'$ .

Легко показать, что ширина входящего пучка  $h_I$  будет определять собой высоту  $h$  на главной меридиональной плоскости. Выразим эту величину через высоту на первой преломляющей поверхности:

$$h_I = h_1 \cos i_1 = \bar{h} \cos \beta. \tag{162}$$

Так как линейное увеличение  $V$  в главных плоскостях равно единице, то заднее главное фокусное расстояние в меридиональной плоскости определится из отношения:

$$f'_t = \frac{\bar{h} \cos \beta'}{d\beta'_t} = \frac{h_I}{d\beta'_t} \cdot \frac{\cos \beta'}{\cos \beta} = -f_t \frac{\cos \beta'}{\cos \beta}, \tag{163}$$

откуда легко найти и узловое меридиональное фокусное расстояние:

$$-f_t = \frac{h_I}{d\beta'_t}. \tag{164}$$

Зная величины  $h_m$  и  $i'_m$ , можно легко определить и отрезок от последней поверхности до заднего меридионального фокуса  $t'_m$ :

$$t'_m = \frac{h_m}{\cos i'_m d\beta'_t}. \quad (165)$$

### § 17. Линзы конечной толщины

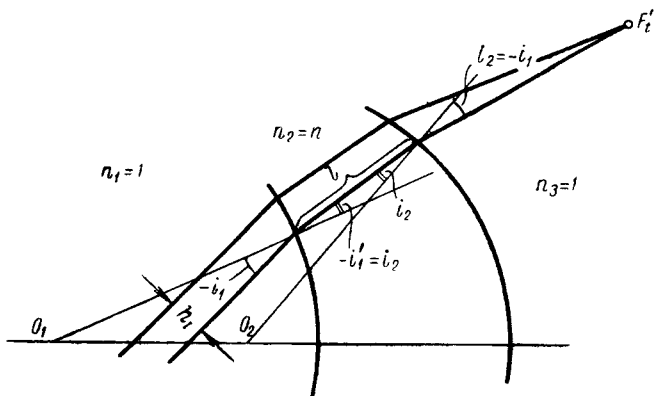
Применим выведенные формулы для рассмотрения работы линз, имеющих конечные толщины.

Рассмотрим частный случай толстой линзы, имеющей равные углы преломления на обеих поверхностях.

Должны быть соблюдены условия:

$$-i_1 = i'_2 \text{ и } -i'_1 = i_2. \quad (166)$$

Пусть на нашу линзу падает параллельный пучок лучей ( $d\beta_1 = 0$ ) шириной  $h_1$  (фиг. 26, на которой все обозначения те же, что и на фиг. 24 и фиг. 25).



Фиг. 26. Пример определения меридионального фокусного расстояния линзы конечной толщины на краю.

Вспользуемся формулой (157) для первой преломляющей поверхности:

$$n_2 \cos i'_1 d\beta_2 = n_1 \cos i_1 d\beta_1 + \frac{h_1}{r_1} (n_2 \cos i'_1 - n_1 \cos i_1) \quad (167)$$

или, помня, что  $n_1 = n_3 = 1$ , и выражая  $h_1$  через  $h_2$ , напомним:

$$n \cos i_2 d\beta_2 = \frac{h_1}{r_1 \cos i_1} (n \cos i_2 - \cos i_1). \quad (168)$$

Пользуясь вслед за этим формулой (160), определяем величину

$$h_2 \cos i_2 = h_1 \cos i_2 - l d\beta_2 = h_1 \frac{\cos i_2}{\cos i_1} - l \frac{h_1 (n \cos i_2 - \cos i_1)}{r_1 n \cos i_1 \cos i_2} \quad (169)$$

и

$$h_2 = \frac{h_1}{\cos i_1} \left[ 1 - \frac{l}{nr_1 \cos^2 i_2} (n \cos i_2 - \cos i_1) \right]. \quad (170)$$



Далее переходим к определению величины  $d\beta_3$ , снова пользуясь формулой (157). Находим:

$$\cos i'_2 d\beta_3 = \cos i_1 d\beta_3 = n \cos i_2 d\beta_2 + \frac{h_2}{r_2} (\cos i'_2 - n \cos i_2), \quad (171)$$

а затем после некоторых преобразований из формулы (164) получаем окончательно

$$-\frac{\cos^2 i_1}{f_l} = (n \cos i_2 - \cos i_1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{l (n \cos i_2 - \cos i_1)^2}{nr_1 r_2 \cos^2 i_2}, \quad (172)$$

выражение для узловой оптической силы линзы конечной толщины в меридиональной плоскости при равноотклоненном ходе глазного луча.

Легко показать, что формула (172) по внешнему виду весьма напоминает известную формулу для оптической силы толстой линзы на оси системы для нулевых лучей и переходит в нее для случая малых углов  $i_1$  и  $i_2$ .

### § 18. Формулы перехода в сагиттальной плоскости

Переход от одной поверхности к другой в сагиттальной плоскости может быть выполнен тем же методом, что и для меридиональной плоскости, с той лишь разницей, что вместо меридионального инварианта будем пользоваться сагиттальным инвариантом. Кроме того, переход по высотам также значительно упростится ввиду того, что высоты всегда будут перпендикулярны к главному лучу.

Обозначая отношения высот в сагиттальной плоскости к соответственным отрезкам  $s$  и  $s'$  через  $d\beta_s$  и  $d\beta'_s$  (высоты  $h$  на поверхностях, как всегда, полагаем малыми) и умножая сагиттальный инвариант [формула (68)] на некоторую высоту  $h$ , получаем:

$$n' d\beta'_s - n d\beta_s = \frac{h}{r} (n' \cos i' - n \cos i). \quad (173)$$

Формулу же перехода по высотам от поверхности к поверхности в сагиттальной плоскости можно привести ввиду перпендикулярности высот к главному лучу к следующему виду:

$$h_{k+1} = h_k - l_k d\beta_{k+1}, \quad (174)$$

соответствующему формуле перехода по высотам для нулевых лучей.

Кроме того, в случае параллельности входящего в систему сагиттального пучка лучей высота на первой поверхности непосредственно определит собой высоту на главных плоскостях.

Перейдем теперь к определению оптической силы толстой линзы в сагиттальной плоскости для рассмотренного ранее случая равного отклонения главного луча на обеих поверхностях линзы.

Пользуясь формулой (173) и помня, что  $d\beta_1 = 0$ , можно написать:

$$n_2 d\beta_2 = \frac{h_I}{r_1} (n_2 \cos i_2 - \cos i_1). \quad (175)$$

Определим высоту  $h_2$  с помощью формулы (174):

$$h_2 = h_1 - l d\beta_2 = h_I \left[ 1 - \frac{l}{nr_1} (n \cos i_2 - \cos i_1) \right]. \quad (176)$$

Пользуясь затем формулой (173) вторично, находим  $d\beta_3$ :

$$d\beta_3 = \frac{h_I}{r_1} (n \cos i_2 - \cos i_1) + \frac{h_2}{r_2} (\cos i_1 - n \cos i_2), \quad (177)$$

откуда без особого труда получаем интересующее нас выражение для узловой оптической силы линзы конечной толщины в сагиттальной плоскости:

$$\frac{1}{f'_s} = \frac{d\beta_3}{h_I} = -\frac{1}{f_s} = (n \cos i_2 - \cos i_1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{l (n \cos i_2 - \cos i_1)^2}{nr_1 r_2}. \quad (178)$$

# ОГРАНИЧЕНИЕ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ ПРИ БОЛЬШИХ ПОЛЯХ ЗРЕНИЯ

## Глава V

### ВИНЬЕТИРОВАНИЕ

#### § 19. Виньетирование в одном и том же пространстве

Ранее был рассмотрен ход лучей в оптической системе вне зависимости от того, каким образом ограничиваются пучки лучей, входящие в изучаемую систему.

Однако все реальные оптические системы всегда будут ограничены по своим габаритам, и потому приходится иметь в виду то или иное ограничение хода лучей в оптической системе.

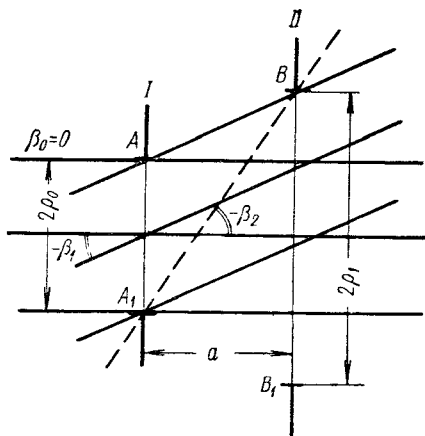
В большинстве случаев встречаются круглые диафрагмы с центром на оси системы, служащие для ограничения проходящих через систему пучков лучей.

Наиболее простым случаем ограничения пучков будет тот, когда перед какой-либо оптической системой расположены в одном и том же пространстве две диафрагмы, ограничивающие входящие в систему пучки лучей.

К рассмотрению этого случая мы и перейдем, полагая для простоты рассуждений, что предмет лежит на бесконечности. Тогда, рассматривая точку, лежащую на оси системы, получим от нее параллельный оси пучок лучей, входящий в нашу систему.

Если первая из диафрагм (фиг. 27) будет иметь меньшее отверстие (например,  $AA_1$ ), нежели вторая, то первая диафрагма и определит своим диаметром ширину входящего в оптическую систему осевого пучка лучей.

Для другой точки предмета, уже не лежащей на оси системы и посылающей в нее наклонный пучок параллельных лучей под



Фиг. 27. Ограничение пучков при двух диафрагмах.

некоторым углом  $\beta_1$  к этой оси, в том случае если угол наклона пучка не очень велик, возможно полное пропускание этого пучка через отверстие второй диафрагмы без срезания.

Нетрудно определить предельную величину угла наклона, при котором еще не будет происходить срезания наклонного пучка.

Из фиг. 27 следует, что

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\rho_1 - \rho_0}{a}. \quad (179)$$

Производя дальнейшее увеличение угла наклона пучка лучей, вызовем сначала частичное, а затем полное срезание пучка посредством второй диафрагмы. Величину угла полного срезания наклонного пучка точно так же легко можно определить из фиг. 27:

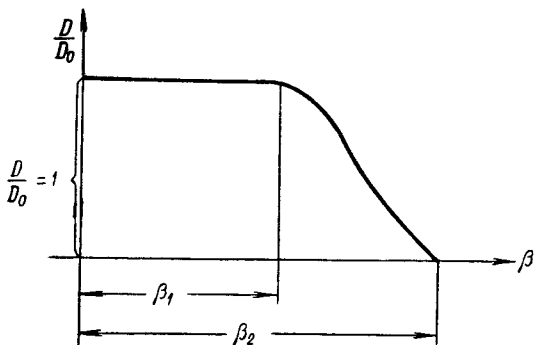
$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{\rho_1 + \rho_0}{a}. \quad (180)$$

Рассмотренное явление носит название **геометрического виньетирования**; условимся функцию, выражающую виньетирование, обозначать через

$$F(\beta) = \frac{D}{D_0}, \quad (181)$$

где  $D$  — площадь перпендикулярного оси системы сечения наклонного пучка;

$D_0$  — площадь сечения осевого пучка, входящего в систему параллельно оси.



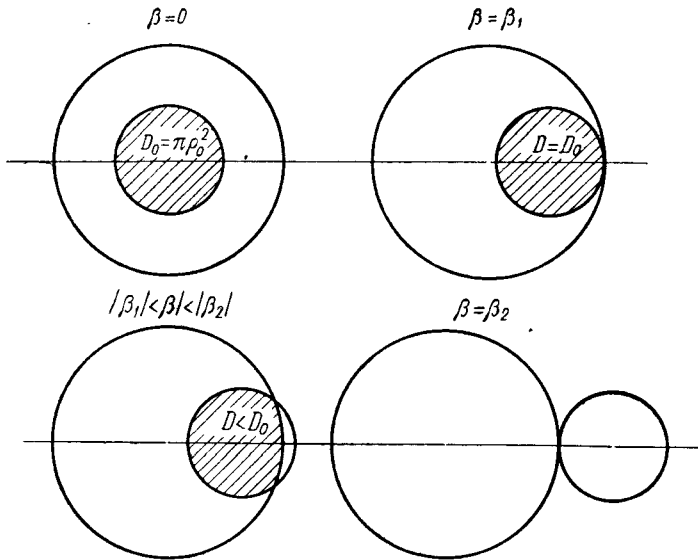
Фиг. 28. Функция виньетирования.

Выражая функцию виньетирования графически (фиг. 28), видим, что в интервале от значения угла  $\beta = 0$  до  $\beta = \beta_1$  функция  $F(\beta)$  тождественно равна единице и в интервале после  $\beta = \beta_1$  начинает убывать, падая до нуля при  $\beta = \beta_2$ .

На фиг. 29 показан процесс срезания площади перпендикулярного оси системы сечения наклонного пучка.

Легко показать, что этот процесс полностью обусловлен взаимным пересечением цилиндрической проекции одной из диафрагм с отверстием другой диафрагмы.

Процесс виньетирования может быть рассмотрен и тогда, когда предмет не лежит в бесконечности, но при этом придется иметь дело с конической проекцией одной из диафрагм на плоскость другой.

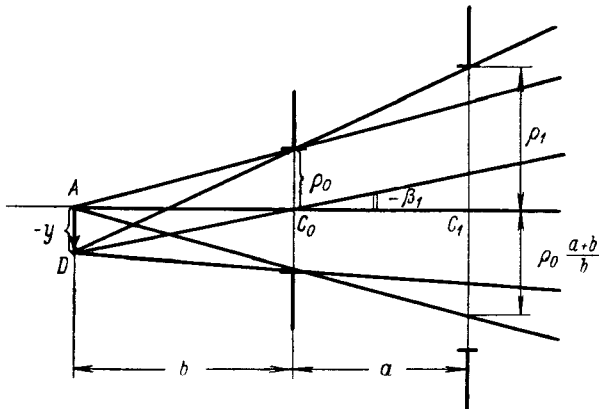


Фиг. 29. Срезание площади зрачка.

Для этого случая границу отсутствия виньетирования, согласно фиг. 30, можно найти по формуле

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\rho_1 - \rho_0 \left(1 + \frac{a}{b}\right)}{a}; \quad (182)$$

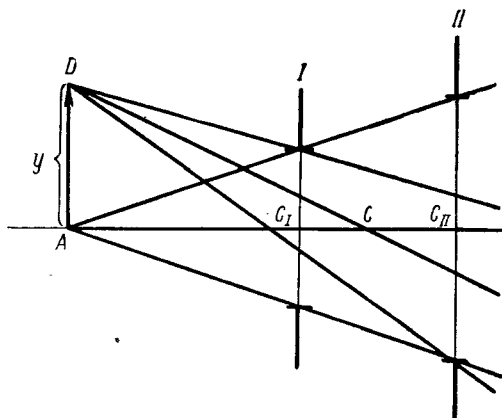
граница же полного срезания вычисляется по формуле (180).



Фиг. 30. Ограничение сходящихся пучков при двух диафрагмах.

Перейдем к рассмотрению частного случая, когда при предмете, лежащем в бесконечности, обе диафрагмы имеют одинаковые диаметры. Тогда угол  $\beta_1$  — граница отсутствия виньетирования — становится равным нулю; иными словами, процесс срезания будет начинаться, как только рассматриваемая точка будет смещена с оси системы.

Для предмета, лежащего на конечном расстоянии (фиг. 31), такая же картина будет иметь место тогда, когда обе диафрагмы коснутся своими отверстиями конуса лучей, исходящего из предметной точки, лежащей на оси системы.



Фиг. 31. Пример определения главного луча и положения зрачка.

Очевидно, что в этом случае определение зрачка, даваемое в классической теории оптических приборов, оказывается уже несостоятельным, так как любую из двух диафрагм можно было бы принимать за зрачок.

Однако такая неопределенность не может быть терпима, так как однозначное нахождение положения зрачка, хотя бы даже только для каждого из

рассматриваемых наклонных пучков, необходимо, например, для определения хода главного луча в пучке.

Для устранения такой неопределенности дадим в качестве точки, определяющей положение зрачка, точку пересечения главного луча с осью системы, полагая, что главный луч является лучом, идущим в середине рассматриваемого наклонного пучка.

При таком определении положения зрачка отпадает всякая неопределенность, так как во всех случаях можно отыскать однозначное положение зрачка для любого наклонного пучка, входящего или выходящего из системы.

В рассмотренном случае двух диафрагм, наблюдаемых под одним и тем же углом, дающем неопределенность при применении классического определения, получаем зрачок, расположенный между обеими диафрагмами и в случае параллельности осевого пучка делящий расстояние между диафрагмами пополам.

## § 20. Численное определение виньетирования

Численное определение виньетирования необходимо для разрешения двух задач, постоянно встречающихся при расчете и исследовании оптических систем:

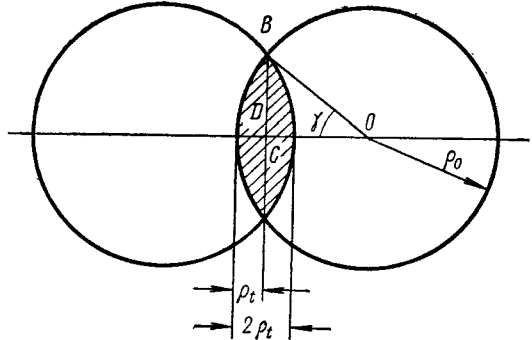
1) определения изменения светосилы системы по полю зрения — светораспределения по полю;

2) определения ширины наклонных пучков, входящих в оптическую систему, необходимого для точного выявления аберраций, имеющих в рассматриваемом наклонном пучке.

Решение этих задач может быть выполнено с той или иной степенью приближения, но точное решение их обычно оказывается весьма трудоемким.

Решение первой из поставленных задач требует вычисления площадей, ограничиваемых дугами окружностей (в более общем случае — эллипсов, когда учитывается аберрационное виньетирование, о котором будет идти речь в последующем).

В простейшем случае площадь сечения пучка может быть ограничена дугами двух окружностей одинакового радиуса (фиг. 32). Этот случай встречается достаточно часто и потому может быть подвергнут самостоятельному рассмотрению.



Фиг. 32. Пример определения площади сечения пучка в простейших случаях.

На фиг. 32  $D$  — площадь сечения пучка в меридиональном сечении;  $\rho_0$  — радиус отверстия обеих диафрагм, ограничивающих со-

бою осевой пучок и создающих виньетирование в наклонном пучке;  $\gamma$  — вспомогательный угол, образованный радиусом, соединяющим точку пересечения  $B$  дуг обеих окружностей с центром одной из них.

Из фиг. 32 следует:

$$BC = \rho_0 \sin \gamma; \quad CO = \rho_0 \cos \gamma. \quad (183)$$

Определим площадь сектора, образуемого углом  $\gamma$ :

$$S_1 = \frac{\gamma}{2} \rho_0^2. \quad (184)$$

Вычислим площадь треугольника  $BCO$ :

$$S_2 = \frac{BC \cdot CO}{2} = \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{2} \rho_0^2. \quad (185)$$

Зная площади  $S_1$  и  $S_2$ , можно легко определить и площадь сечения рассматриваемого пучка  $D$ :

$$D = 4(S_1 - S_2) = (2\gamma - \sin 2\gamma) \rho_0^2. \quad (186)$$

Площадь сечения осевого пучка легко определяется по формуле:

$$D_0 = \pi \rho_0^2. \quad (187)$$

Деля формулу (186) на формулу (187), получаем выражение для функции виньетирования:

$$F(\beta) = \frac{D}{D_0} = \frac{2\gamma - \sin 2\gamma}{\pi}. \quad (188)$$

Определим для этого же случая линейное виньетирование. Величина  $\rho_t$  легко находится как разность отрезков  $\rho_0$  и  $CO$ :

$$\rho_t = \rho_0 - \rho_0 \cos \gamma = (1 - \cos \gamma) \rho_0. \quad (189)$$

Деля (189) на  $\rho_0$ , получаем линейное виньетирование:

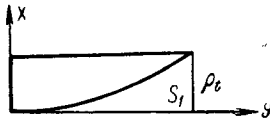
$$\rho(\beta) = \frac{2\rho_t}{2\rho_0} = 1 - \cos \gamma. \quad (190)$$

Зная линейное виньетирование, можем определить угол  $\gamma$  по формуле (190) и по формуле (188) виньетирование по площади.

Особый интерес представляет задача определения виньетирования при условии, что площадь сечения пучка невелика; этот случай соответствует обычно краю поля зрения. При этом угол  $\gamma$  становится сравнительно небольшим (порядка  $30^\circ$ ).

В таких случаях можно отказаться от точной формулы (188) и перейти к приближенным формулам. В частности, дуговые сегменты можно заменить сегментами параболической формы. Если величина углов не будет превышать  $30^\circ$ , определение площади сечения пучка будет производиться с погрешностью не выше 5%, что практически вполне приемлемо.

Фиг. 33. Двойной параболический сегмент.



Фиг. 34. Пример определения площади параболического сегмента.

На фиг. 33 показано сечение пучка, ограниченное двумя параболическими сегментами, а на фиг. 34 — половина параболического сегмента. Вычислим площадь этой половины.

Напишем уравнение параболы:

$$y^2 = 2px. \quad (191)$$

Параметр  $p$  — радиус кривизны параболы в ее вершине равен  $\rho_0$ . Можно легко определить площадь  $S_1$ , дополняющую площадь половины параболического сегмента до площади прямоугольника (фиг. 34), из выражения:

$$S_1 = \int_0^y x dy = \int_0^y \frac{y^2 dy}{2\rho_0} = \frac{y^3}{6\rho_0}. \quad (192)$$

Определив площадь прямоугольника  $S_2 = xy$ , легко найти искомую площадь половины нашего параболического сегмента:

$$\frac{D}{4} = S_2 - S_1 = \frac{y^3}{2\rho_0} - \frac{y^3}{6\rho_0} = \frac{y^3}{3\rho_0}. \quad (193)$$



Выражая  $y$  через  $x$ , можно получить выражение для площади сечения пучка:

$$D = 4(S_2 - S_1) = \frac{4}{3} \cdot \frac{y^3}{\rho_0} = \frac{8}{3} x \sqrt{2\rho_0 x}. \quad (194)$$

Согласно фиг. 34 величина  $x$  есть не что иное, как  $\rho_t$ . Поэтому площадь сечения наклонного пучка может быть представлена в следующем виде:

$$D = \frac{8}{3} \rho_t \rho_0 \sqrt{2 \frac{\rho_t}{\rho_0}}. \quad (195)$$

Деля  $D$  на  $D_0$ , получаем уравнение для функции, выражающей виньетирование:

$$F(\beta) = \frac{D}{D_0} = \frac{8}{3\pi} \cdot \frac{\rho_t}{\rho_0} \sqrt{2 \frac{\rho_t}{\rho_0}}. \quad (196)$$

Пользуясь затем выражением для линейного виньетирования [формула (190)], находим окончательное выражение для функции  $F(\beta)$ :

$$F(\beta) = \frac{D}{D_0} = \frac{8 \sqrt{2}}{3\pi} \rho(\beta) \sqrt{\rho(\beta)}. \quad (197)$$

Полученная приближенная формула (197) дает достаточно хорошую точность для случаев сильного виньетирования (при котором собственно и имеется необходимость определения значения виньетирования), когда разность между площадью параболического и кругового сегментов становится исчезающе малой.

Имея в распоряжении формулы (188) и (190), можно составить таблицу значений функций  $\rho(\beta)$  и  $F(\beta)$  в зависимости от параметра  $\gamma$ .

Задавая параметру  $\gamma$  ряд значений через  $9^\circ$  ( $10^\circ$ ), вычислили соответствующие значения обеих функций  $\rho(\beta)$  и  $F(\beta)$ .

Эти значения приведены в табл. 1.

Таблица 1

$\gamma$	$\rho(\beta)$	$F(\beta)$
$0^\circ$	0,0000	0,0000
9	0,0123	0,0017
18	0,0489	0,0129
27	0,1090	0,0425
36	0,1910	0,0933
45	0,2929	0,1817
54	0,4122	0,2973
63	0,5460	0,4425
72	0,6910	0,6129
81	0,8436	0,8017
90	1,0000	1,0000

Для значений  $\gamma$ , лежащих в пределах  $36-63^\circ$ , функция  $F(\beta)$  почти линейно связана с линейным виньетированием  $\rho(\beta)$  и может быть выражена формулой

$$F(\beta) \cong \rho(\beta) - 0,1, \quad (198)$$

справедливой в случае

$$0,6 \geq \rho(\beta) \geq 0,2. \quad (199)$$

Ранее для этого же частного случая была дана следующая приближенная формула <sup>1</sup>:

$$F(\beta) = \frac{D}{D_0} = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - 2x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4.5}x^5 + \frac{1}{7.8}x^7 + \dots \right], \quad (200)$$

где величина  $x$  есть не что иное, как

$$x = \frac{k}{\rho} \operatorname{tg} \beta = 1 - \rho(\beta). \quad (201)$$

Заметим, что формула (200) теряет свою сходимость для значений  $x = 1$ , или, что то же самое, для значений  $\rho(\beta)$ , близких к нулю. Таким образом, формула (200) не может применяться в случае сильного виньетирования, и область ее применения должна быть ограничена определением виньетирования лишь в центральной части поля зрения.

В более общем случае не представляется возможным выработать какую-либо общую формулу для определения виньетирования; в связи с этим следует ограничиться лишь численными приемами определения виньетирования для заранее заданных углов наклона исследуемых наклонных пучков.

Решить эту задачу наиболее удобно по известной приближенной формуле Симпсона для определения площадей. <sup>2</sup>

В нашем случае пользование формулой Симпсона несколько упрощается благодаря тому, что сечения рассматриваемых наклонных пучков будут симметричны относительно меридиональной плоскости системы.

Обратимся к фиг. 35, на которой дана площадь сечения наклонного пучка, перпендикулярного оси системы.

В силу симметрии относительно меридиональной плоскости фигура сечения наклонного пучка также будет симметрична относительно меридиональной плоскости; поэтому задача нахождения всей площади сечения наклонного пучка сведется к нахождению площади половины сечения  $S$ .

Пользуясь фиг. 36 и формулой Симпсона, находим площадь, ограниченную кривой, ее начальной и конечной ординатами и осью абсцисс для четного числа  $2m$  равных интервалов  $h$  между начальной и конечной ординатами:

$$S = \frac{4h}{3} (y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + \frac{2h}{3} (y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + \frac{h}{3} (y_0 + y_{2m}) \quad (202)$$

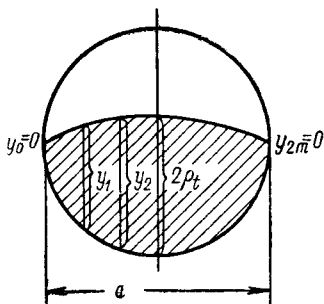
<sup>1</sup> См. М. М. Русинов, «Оптика аэросъемочных приборов», стр. 39, ОНТИ, 1936.

<sup>2</sup> См. И. Н. Бронштейн и К. А. Семендяев, «Справочник по математике», стр. 391, Гостехиздат, 1953.

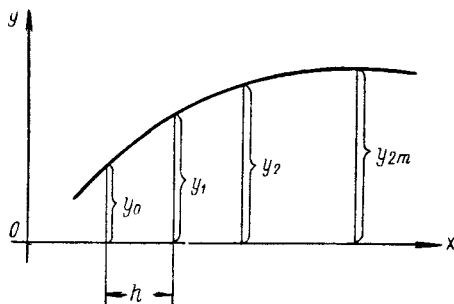
и для нечетного числа интервалов  $2m + 1$ :

$$S = \frac{4h}{3} (y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + \frac{2h}{3} (y_2 + y_4 + \dots + y_{2m}) + \frac{h}{3} (y_0 + y_{2m+1}). \quad (203)$$

В рассматриваемом случае начальная ордината  $y_0$  равна нулю. Практически вполне достаточно разбить расстояние между начальной и конечной ординатами на два или три интервала.



Фиг. 35. Пример определения площади сечения пучка по формуле Симпсона.



Фиг. 36. Разбивка площади.

Для этих случаев формула Симпсона принимает следующий вид:

а) для двух интервалов при  $y_2 = 2\rho_t$

$$D = 2S = \frac{2a}{3} y_1 + \frac{a}{3} \rho_t = \frac{a}{6} (4y_1 + 2\rho_t); \quad (204)$$

б) для трех интервалов при  $y_3 = 2\rho_t$

$$D = 2S = \frac{4a}{9} y_1 + \frac{2a}{9} y_2 + \frac{2a}{18} 2\rho_t = \frac{a}{9} (4y_1 + 2y_2 + 2\rho_t). \quad (205)$$

Формула Симпсона очень удобна для экспериментального определения виньетирования по фотографиям сечений наклонных пучков, легко получаемых при фотографировании зрачков исследуемой системы (например, фотообъектива); при аналитическом же определении виньетирования необходимо знать радиусы дуг, виньетирующих пучков, и линейное виньетирование в меридиональной плоскости.

Перейдем к определению линейного виньетирования (фиг. 37). На фигуре показаны две диафрагмы I и II, касающиеся одного и того же осевого пучка, исходящего из некоторой точки  $\bar{A}$ . Пусть расстояние между диафрагмами равно  $a$ ; расстояние от предмета до первой диафрагмы примем равным  $b$ . Полагая отверстие первой диафрагмы равным  $2\rho_0$ , можно на основании подобия треугольников, построенных на отверстиях обеих диафрагм, легко получить для отверстия второй диафрагмы

$$2\rho_1 = 2\rho_0 \left( 1 + \frac{a}{b} \right). \quad (206)$$



Подставляя полученное значение  $y$  в формулу (207) и сокращая обе части равенства на  $(\rho_0 - \rho_t)$ , получаем:

$$2 = \frac{1 + \frac{b}{c}}{1 + \frac{b}{a}}. \quad (211)$$

Из формулы (211) следует:

$$2 \left(1 + \frac{b}{a}\right) - 1 = \frac{b}{c} = 1 + 2 \frac{b}{a}, \quad (212)$$

откуда легко определить и величину  $c$ :

$$c = \frac{b}{2 \left(1 + \frac{b}{a}\right) - 1} = \frac{b}{1 + 2 \frac{b}{a}}. \quad (213)$$

Из формулы (213) следует, что величина  $c$  — расстояние от первой диафрагмы до центра зрачка — должна быть постоянной при постоянстве положения обеих диафрагм относительно предмета независимо от его величины.

Возвращаясь к формуле (209), можно выразить диаметр сечения наклонного пучка на диафрагме  $I$  через тангенс угла главного луча с осью системы:

$$2\rho_t = 2\rho_0 - \frac{1 + \frac{c}{b}}{1 + \frac{a}{b}} \cdot a \operatorname{tg} \beta. \quad (214)$$

Разделив эту формулу на  $2\rho_0$ , получим для линейного виньетирования:

$$\rho(\beta) = \frac{2\rho_t}{2\rho_0} = 1 - \frac{1 + \frac{c}{b}}{1 + \frac{a}{b}} \cdot \frac{a}{2\rho_0} \operatorname{tg} \beta. \quad (215)$$

Из формулы (215) видно, что линейное виньетирование линейно связано с величиной тангенса угла поля зрения.

Формула (215) приобретает особенно простой вид в случае, когда предмет лежит в бесконечности, т. е. когда величина  $b$  становится равной бесконечности. Тогда линейное виньетирование

$$\rho(\beta) = 1 - \frac{a}{2\rho_0} \operatorname{tg} \beta. \quad (216)$$

Величина  $c$  также принимает очень простой вид:

$$c = \frac{a}{2}. \quad (217)$$

Полученные формулы были выведены в предположении, что обе диафрагмы  $I$  и  $II$  касались одновременно осевого пучка. В действительности же возможны случаи, когда диафрагмы не будут касаться осевого пучка одновременно, например, всегда можно предположить,

что диафрагма  $II$  не касается осевого пучка. В этом случае первая из диафрагм вначале будет играть роль входного зрачка до тех пор, пока наклонный пучок не коснется второй диафрагмы.

С того же момента, когда такое касание произошло, следует аналогично предыдущему определять положение центра зрачка для наклонного пучка, как точки пересечения главного луча с осью системы.

Из фиг. 37 следует, что в случае увеличения второй диафрагмы с момента начала ее работы к меридиональному диаметру наклонного пучка будет прибавляться некоторый постоянный отрезок  $e$ , величина которого легко может быть определена из подобия треугольников, основанием которых являются разность радиусов второй диафрагмы и сечения осевого пучка в плоскости второй диафрагмы и искомая величина  $e$ :

$$e = \frac{b}{a+b} \left[ \rho_{II} - \rho_0 \left( 1 + \frac{a}{b} \right) \right] = \text{const.} \quad (218)$$

Величина диаметра сечения наклонного пучка теперь выразится формулой (219):

$$2\rho_t = 2\rho_0 - \frac{a}{a+b} y + e. \quad (219)$$

При этом линейное виньетирование оказывается линейной функцией относительно величины предмета  $y$ .

Если же предмет лежит в бесконечности, функция, выражающая линейное виньетирование, будет, как и раньше, линейной относительно тангенса угла поля зрения  $\beta$ .

Поэтому для быстрого нахождения линейного виньетирования можно построить на графике виньетирования характерные точки начала и конца действия той или иной из диафрагм и соединить их прямыми линиями.

Этот прием справедлив лишь для определения виньетирования только в пространстве предметов; при переходе в пространство изображений или в случае, когда одна или несколько диафрагм расположены в разных пространствах, линейность функции линейного виньетирования может оказаться нарушенной вследствие наличия в системе аберрационного виньетирования.

## Глава VI

### АБЕРРАЦИОННОЕ ВИНЬЕТИРОВАНИЕ

#### § 21. Изображение диафрагм оптической системой

Перейдем к рассмотрению случая, когда диафрагма, ограничивающая световые пучки, изображается всей или частью оптической системы.

В классической теории оптических приборов это сводится к рассмотренному выше случаю работы диафрагм в одном и том же про-

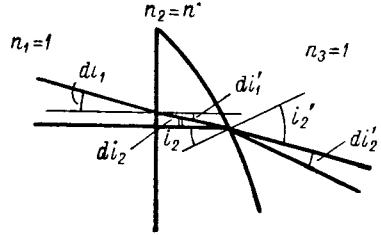
странстве, так как в этой теории принимается, что изображение диафрагм, ограничивающих световые пучки, создается без aberrаций.

Для реальных оптических систем, обладающих полями зрения конечной величины, такое допущение не обосновано; наоборот, на практике влияние aberrаций при изображении диафрагм, ограничивающих световые пучки, в достаточной степени ощутимо.

Этому положению будет способствовать еще и то, что в искусственном уничтожении aberrаций для изображения диафрагм, ограничивающих световые пучки, нет необходимости.

Рассмотрим работу простой плоско-выпуклой линзы, выполняющей функции коллектива.

Определим угловое увеличение на остром крае плоско-выпуклой линзы для случая, когда пучок лучей падает на нее нормально к плоской поверхности (фиг. 38).



Фиг. 38. Пример определения углового увеличения на остром крае линзы плоско-выпуклой формы.

На фиг. 38  $i_2$  и  $i_2'$  — углы падения и преломления на второй поверхности линзы;  $di_1$  и  $di_1'$  — углы падения и преломления на первой поверхности луча, падающего также на острый край рассматриваемой линзы, но уже под углом  $di_1$  к нормали плоской поверхности;  $di_2$  и  $di_2'$  — изменения углов падения и преломления  $i_2$  и  $i_2'$  на второй поверхности.

На основании закона преломления можно написать:

$$\sin i_1 = n \sin i_1'; \quad (220)$$

дифференцируя, находим для малых  $i$ :

$$\cos i_1 di_1 = n \cos i_1' di_1'; \quad di_1 = n di_1'. \quad (221)$$

Из фиг. 38 следует, что

$$di_1' = di_2, \quad (222)$$

откуда

$$n di_1 = di_1 = n di_2. \quad (223)$$

Обращаясь к преломлению на второй поверхности, можно написать:

$$n \sin i_2 = \sin i_2'. \quad (224)$$

Дифференцируя, находим:

$$n \cos i_2 di_2 = \cos i_2' di_2' = \cos i_2 di_1 \quad (225)$$

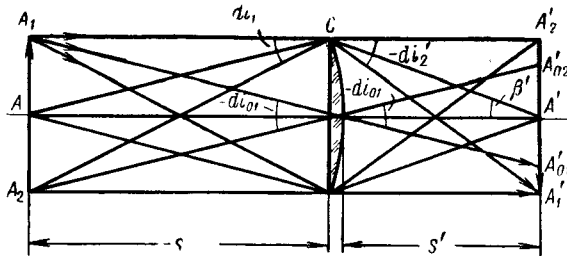
или

$$di_2' = \frac{\cos i_2}{\cos i_2'} di_1. \quad (226)$$

Отсюда следует, что

$$di_2' > di_1. \quad (227)$$

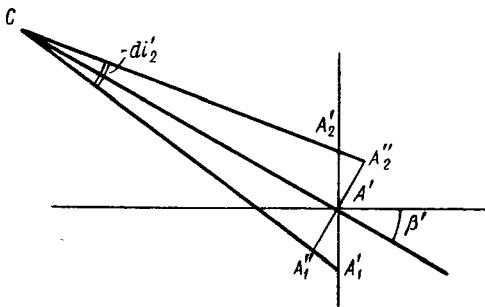
На фиг. 39  $A_2$  и  $A_1$  — края диафрагмы, равной по своей величине диаметру линзы. Центр  $A$  диафрагмы изображается в некоторой точке  $A'$ . Пучок лучей, исходящий из точек  $A_2$  и  $A_1$ , составляет у острого края линзы некоторый угол  $di_1$ . Пучок лучей, исходящий из тех же самых точек, но идущий к центру линзы, образует угол  $di_{01}$ .



Фиг. 39. Работа плоско-выпуклого коллектива.

В случае, если расстояние  $s$  от диафрагмы до линзы достаточно велико, то углы  $di_1$  и  $di_{01}$  можно принять равными друг другу.

Пучок лучей после прохождения через центр линзы сохранит угол расхождения неизменным, так как можно без большой погрешности принять, что рассматриваемый пучок будет проходить через узловые (главные) точки, лежащие внутри линзы.



Фиг. 40. Определение величины изображения зрачка в меридиональной плоскости.

Однако для пучка лучей, падающего на острый край линзы, угол расхождения по выходе из линзы, как установлено выше, значительно больше, чем в момент падения на линзу.

Перейдем к рассмотрению плоскости изображения диафрагмы. Расстояние от острого края линзы  $C$  до точки изображения центра диафрагмы  $A'$ , равно  $CA'$ , больше, нежели отрезок  $s'$  от вершины линзы до точки  $A'$ .

Из хода главных лучей, идущих через центр линзы, легко определить размер изображения  $A'_{01} A'_{02}$ :

$$A'_{01} A'_{02} = s' di_{01} \quad (228)$$

Определим размер изображения  $A'_1 A'_2$  из хода лучей, идущих через острый край линзы. Рассмотрим фиг. 40, на которой  $A'_1 A'_2$  — сечение пучка наклонных лучей плоскостью, перпендикулярной лучу  $CA'$ . Пользуясь фиг. 40, можно определить величину отрезка  $A'_1 A'_2$ , равную

$$A'_1 A'_2 = CA' di_2; \quad (229)$$



из формулы (229) определяется и искомый отрезок  $A'_1 A'_2$ :

$$A'_1 A'_2 = \frac{A_1 A_2}{\cos \beta'} = \frac{CA'}{\cos \beta'} di_2'. \quad (230)$$

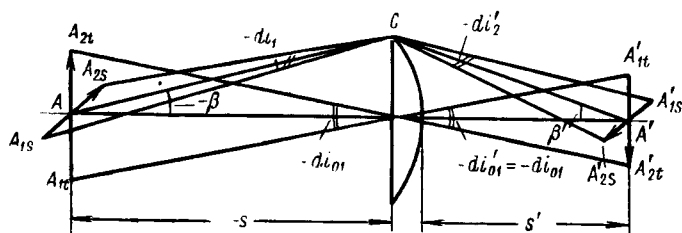
Так как ранее было установлено, что

$$CA' > s' \quad (231)$$

то из формул (230) и (228) следует, что и

$$A'_1 A'_2 > A_{01} A_{02}. \quad (232)$$

Неравенство (232) показывает, что величина изображения одной и той же диафрагмы, создаваемого осевым и наклонными пучками лучей, получается различной для обоих пучков, причем величина изображения для наклонного пучка в рассматриваемом примере оказывается больше, нежели для осевого пучка.



Фиг. 41. Определение величины изображения зрачка в сагиттальной плоскости.

Это явление, как и обыкновенное геометрическое виньетирование, изменяет величину площади изображения отверстия диафрагмы (зрачка) в зависимости от величины изображения (угла поля зрения). В силу этого такое явление уместно назвать **а б е р р а ц и о н н ы м** **в и н ь е т и р о в а н и е м**, так как его существование неразрывно связано с наличием aberrаций в изображении отверстия, в частности, комы.

Действительно, из фиг. 39 видно, что крайние лучи пучка, исходящие из одной и той же точки отверстия диафрагмы  $A_1$ , в плоскости изображения пересекают друг друга вне центрального луча пучка, что является одним из признаков существования комы.

В случае отсутствия комы (когда крайние лучи наклонного пучка будут пересекаться на центральном луче) величина изображения отверстия диафрагмы станет одинаковой как для осевого, так и для наклонных пучков лучей, и явления aberrационного виньетирования не будет.

Можно доказать существование aberrационного виньетирования, уменьшающего площадь изображения диафрагмы к краям поля. Для этой цели надо обратить ход лучей на фиг. 39, увеличив угол  $di_{01}$  до совмещения точек  $A_{01}$  и  $A_{02}$  с точками  $A'_1$  и  $A'_2$ . Тогда при обратном ходе лучей изображение для осевых пучков больше, чем для наклонных пучков.

Рассмотрим aberrационное виньетирование в сагиттальной плоскости. На фиг. 41  $A$  и  $A'$  — центры отверстий диафрагмы и ее

изображения;  $A_{1t}$   $A_{2t}$  и  $A_{1s}$   $A_{2s}$  — меридиональный и сагиттальный диаметры отверстия диафрагмы; углы  $di_1$  и  $di'_2$  (элементарные) даны в сагиттальной плоскости; как и раньше, будет иметь место условие:

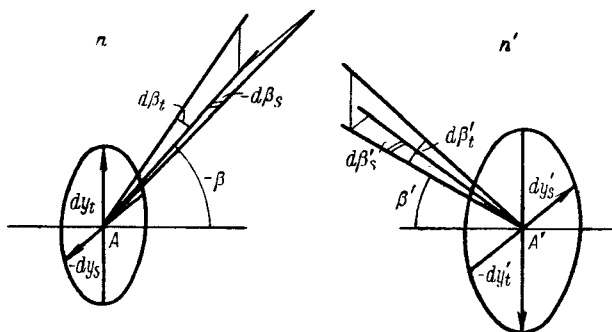
$$di_1 = di_{01}, \quad (233)$$

если отрезок  $s$  достаточно велик по сравнению с диаметром линзы.

Полагая, что предмет в сагиттальной плоскости совпадает с острым краем линзы, приходим к выводу, что линейное сагиттальное увеличение для острого края линзы равно единице. Отсюда следует, что и угловое увеличение для острого края также окажется равным единице. Будем иметь:

$$di_1 = di'_2. \quad (234)$$

Следовательно, элементарные углы  $di'_2$  как в сагиттальной плоскости, так и для осевого пучка равны друг другу; однако величина



Фиг. 42. Пример определения площадей зрачков.

изображения сагиттального диаметра отверстия все же окажется больше, чем диаметр изображения диафрагмы для осевого пучка, так как отрезок  $CA'$  по-прежнему больше, нежели вершинный отрезок  $s'$ .

Рассмотрим количественную сторону абберационного виньетирования. На фиг. 42 в точке  $A$  помещен центр зрачка с полу диаметрами  $dy_t$  и  $dy_s$ ; через центр зрачка  $A$  проходит главный луч наклонного пучка, составляющий с осью системы угол  $\beta$ . Лучи, проходящие в сагиттальной и меридиональной плоскостях через центр зрачка и близкие к главному лучу, составляют с последним соответственно элементарные углы  $d\beta_s$  и  $d\beta_t$ .

В пространстве изображений в точке  $A'$  расположится центр изображения зрачка; полу диаметры изображения соответственно  $dy'_t$  и  $dy'_s$ ; угол главного луча с осью  $\beta'$ ; элементарные углы в сагиттальной и меридиональной плоскостях обозначим через  $d\beta'_s$  и  $d\beta'_t$ .

Полагая, что в качестве входного зрачка служит диафрагма с круглым отверстием, можно написать:

$$dy_t = dy_s = dy_0. \quad (235)$$

Определим величины  $dy'_i$  и  $dy'_s$ . С этой целью обратимся к сагиттальному и меридиональному увеличениям. Пользуясь формулами для этих увеличений, можно написать:

$$dy'_i = V_t dy_i; \quad dy'_s = V_s dy_s. \quad (236)$$

Для нулевых лучей будем иметь:

$$dy'_0 = V_0 dy_0. \quad (237)$$

Определим площадь отверстия зрачка:

$$D = D_0 = \pi dy_0^2. \quad (238)$$

Площадь изображения зрачка для нулевых лучей легко определится на основании формулы (237):

$$D'_0 = \pi dy_0'^2 = \pi V_0^2 dy_0^2. \quad (239)$$

Площадь изображения зрачка, создаваемого наклонным пучком, выразится площадью эллипса с полуосями  $dy'_i$  и  $dy'_s$ . Таким образом,

$$D' = \pi dy'_i dy'_s = \pi V_t V_s dy_0^2. \quad (240)$$

Деля формулу (240) на (239), получаем отношение площади зрачка для наклонного пучка к площади зрачка для осевого пучка. Такое отношение определялось ранее, как функция, выражающая виньетирование; поэтому уместно принять это отношение, как функцию, выражающую абберационное виньетирование. Получаем:

$$\frac{D'}{D'_0} = F(\beta) = \frac{\pi V_t V_s dy_0^2}{\pi V_0^2 dy_0^2} = \frac{V_t V_s}{V_0^2} \quad (241)$$

Анализируя формулу (241), можно установить, что абберационное виньетирование не зависит от величины отверстия диафрагм, так как в формулу (241) не вошли величины  $dy$ , определяющие размеры диафрагмы.

Абберационное виньетирование не будет изменяться и при диафрагмировании системы (обычное геометрическое виньетирование при диафрагмировании ослабляется).

## § 22. Определение абберационного виньетирования

Напишем теорему Штраубеля для меридиональной плоскости:

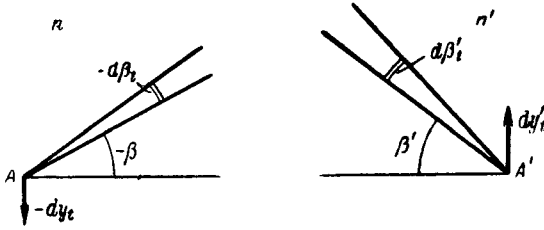
$$n dy_t \cos \beta d\beta_t = n' dy'_t \cos \beta' d\beta'_t. \quad (242)$$

Из этой формулы можно получить выражение для меридионального увеличения:

$$V_t = \frac{dy'_t}{dy_t} = \frac{n \cos \beta d\beta_t}{n' \cos \beta' d\beta'_t} = \frac{n \cos \beta}{n' W_t \cos \beta'}. \quad (243)$$

Величины  $n$ ,  $n'$ ,  $\beta$  и  $\beta'$  обычно известны, величину же углового увеличения  $W_t$  надо определить. Наиболее простой способ — просчет луча, идущего близ главного луча в меридиональной плоскости (фиг. 43). На фигуре  $A$  и  $A'$  — точки пересечения главного луча с осью системы

в пространствах предметов и изображений;  $\beta$  и  $\beta'$  — углы главного луча с осью в тех же пространствах;  $d\beta'_t$  — угол между главным лучом и близким к нему лучом в пространстве предметов;  $d\beta_t$  — угол между главным лучом и близким к нему лучом в пространстве изображений.

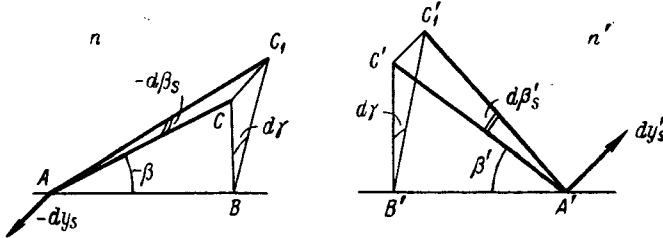


Фиг. 43. Инвариант Штраубеля в меридиональной плоскости.

Отношение дифференциалов  $d\beta'_t$  и  $d\beta_t$  можно без ощутимой погрешности заменить отношением достаточно малых конечных разностей; угловое увеличение определится по формуле

$$W_t = \frac{d\beta'_t}{d\beta_t} = \frac{\Delta\beta'_t}{\Delta\beta_t}. \quad (244)$$

Перейдем к определению сагитального увеличения  $W_s$ . На фиг. 44  $A$  и  $A'$  — точки пересечения главных лучей  $AC$  и  $C'A'$  с осью системы в пространствах предметов и изображений;  $dy_s$  и  $dy'_s$  — элементарные



Фиг. 44. Инвариант Штраубеля в сагитальной плоскости.

предмет и изображение в сагитальной плоскости;  $AC_1$  и  $C_1A'$  — сагитальные лучи, образованные поворотом главных лучей вокруг оси на некоторый малый угол  $d\gamma$ .

Из фиг. 44 следует:

$$d\beta_s = \frac{CC_1}{AC} ; d\gamma = \frac{CC_1}{CB}, \quad (245)$$

откуда

$$d\beta_s = \frac{CB}{AC} d\gamma = d\gamma \sin\beta. \quad (246)$$

Аналогично находим величину угла  $d\beta'_s$ :

$$d\beta'_s = d\gamma \sin\beta'; \quad (247)$$

разделив формулу (247) на формулу (246), получим угловое сагиттальное увеличение:

$$W_s = \frac{d\beta'_s}{d\beta_s} = \frac{\sin \beta'}{\sin \beta}. \quad (248)$$

Напишем теперь выражение для теоремы Штраубеля в сагиттальной плоскости:

$$n dy_s d\beta_s = n' dy'_s d\beta'_s. \quad (249)$$

Из формулы (249) можно получить выражение для сагиттального линейного увеличения:

$$V_s = \frac{dy'_s}{dy_s} = \frac{n d\beta_s}{n' d\beta'_s} = \frac{n \sin \beta}{n' \sin \beta'}. \quad (250)$$

Формула (250) напоминает условие синусов Аббе и переходит в него, если линейное сагиттальное увеличение постоянно и равно линейному увеличению для нулевых лучей. Однако соблюдение условия синусов приводит к устранению комы для участков изображения, близких к оси системы, и должно привести к отсутствию абберационного виньетирования.

Приравнивая формулу (250) линейному увеличению  $V_0$ :

$$V_s = \frac{n \sin \beta}{n' \sin \beta'} = V_0 = \text{const} \quad (251)$$

и дифференцируя, получаем:

$$n \cos \beta d\beta = V_0 n' \cos \beta' d\beta'. \quad (252)$$

Пользуясь формулами (252) и (243), можно установить, что меридиональное линейное увеличение станет равным линейному увеличению для нулевых лучей:

$$V_t = \frac{n \cos \beta d\beta}{n' \cos \beta' d\beta'} = V_0 = \text{const}. \quad (253)$$

Подставляя в формулу (241) значения сагиттального и меридионального линейных увеличений, полученные для случая выполнения условия синусов в зрачках, убеждаемся в том, что выражение для абберационного виньетирования делается тождественно равным единице:

$$\frac{D'}{D_0} = F(\beta) = 1. \quad (254)$$

Установив связь абберационного виньетирования с существованием нарушения условия синусов в зрачках, можно попытаться выразить эту зависимость аналитически.

Для упрощения этой задачи сделаем допущение, что величины нарушения условия синусов невелики и могут быть выражены рядом

$$n \sin \beta = V_0 n' \sin \beta' [1 + A n'^2 \sin^2 \beta' + B n'^4 \sin^4 \beta' + \dots]. \quad (255)$$

Формула (255) показывает, что при малых углах  $\beta$  нарушение условия синусов, как это и должно быть, равно нулю.

Коэффициенты  $A$  и  $B$  — суть некоторые постоянные, характеризующие степень нарушения условия синусов.

Разложение в ряд выполняется по четным степеням  $\sin \beta'$ , так как ввиду симметрии вокруг оси системы нарушение условия синусов не должно изменять знака при изменении знаков у углов поля зрения  $\beta'$ .

Дифференцируя выражение (255), находим:

$$n \cos \beta d\beta_t = n'V_0 [\cos \beta' d\beta'_t + 3An'^2 \sin^2 \beta' \cos \beta' d\beta'_t + 5Bn'^4 \sin^4 \beta' \cos \beta' d\beta'_t + \dots]. \quad (256)$$

Деля формулу (256) на  $n' \cos \beta' d\beta'_t$ , получаем выражение для линейного меридионального увеличения  $V_t$ :

$$V_t = \frac{n \cos \beta d\beta_t}{n' \cos \beta' d\beta'_t} = V_0 [1 + 3An'^2 \sin^2 \beta' + 5Bn'^4 \sin^4 \beta' + \dots]. \quad (257)$$

Деля формулу (255) на  $n' \sin \beta'$ , можно получить и выражение для сагитального линейного увеличения  $V_s$ :

$$V_s = \frac{n \sin \beta}{n' \sin \beta'} = V_0 [1 + An'^2 \sin^2 \beta' + Bn'^4 \sin^4 \beta' + \dots]. \quad (258)$$

Подставляя снова полученные значения величин  $V_t$  и  $V_s$  в выражение (241) для абберационного виньетирования, находим:

$$F(\beta) = \frac{V_t V_s}{V_0^2} = [1 + An'^2 \sin^2 \beta' + Bn'^4 \sin^4 \beta' + \dots] \times \\ \times [1 + 3An'^2 \sin^2 \beta' + 5Bn'^4 \sin^4 \beta' + \dots]. \quad (259)$$

Если высшие порядки нарушения условия синусов, выражаемые членами, содержащими четвертые и более высокие степени  $\sin \beta'$ , будут отсутствовать, то выражение для абберационного виньетирования приобретет более простой вид:

$$F(\beta) = 1 + 4An'^2 \sin^2 \beta'. \quad (260)$$

Формула (260) показывает, что в первом приближении абберационное виньетирование определяется учетверенной величиной относительного отступления от условия синусов  $\frac{\Delta V}{V_0}$ .

### § 23. Абберационное виньетирование в случае отсутствия дисторсии

Для рассмотрения абберационного виньетирования в случае отсутствия дисторсии при угловом увеличении в зрачках, не равном единице, обратимся к фиг. 45. Здесь  $A$  — осевая точка предмета;  $A_0'$  — ее изображение;  $C$  и  $C'$  — центры входного и выходного зрачков;  $\xi$  и  $\xi_0'$  — отрезки от зрачков до предмета и изображения. Величину предмета примем равной:

$$y = y_0. \quad (261)$$

Величину изображения  $y'$  надо по условию ортоскопии принять равной  $y_0$ . Таким образом, получим:

$$y' = y_0 = V_0 y_0. \quad (262)$$

Напишем выражение для теоремы Штраубеля:

$$n' dy'_t \cos \beta' d\beta'_t = n dy_t \cos \beta d\beta_t. \quad (263)$$

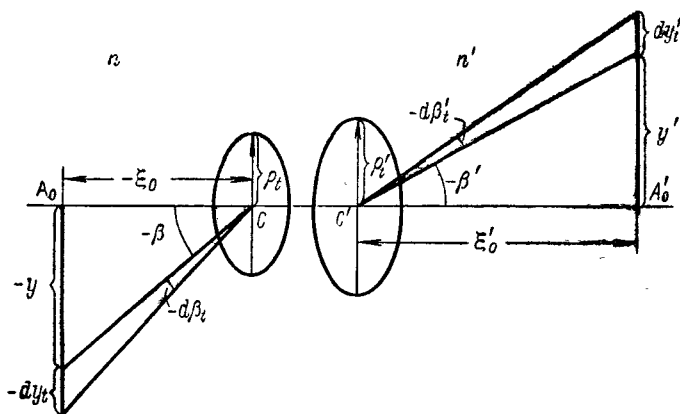
Дифференцируя формулу (262), находим:

$$dy'_t = V_0 dy_t, \quad (264)$$

откуда следует, что для предмета и изображения меридиональное линейное увеличение равно линейному увеличению для нулевых лучей:

$$V_t = \frac{dy'_t}{dy_t} = V_0. \quad (265)$$

Попытаемся найти зависимость между углами  $\beta$  и  $\beta'$ . Если предположить, что положение точек  $C$  и  $C'$  для любых углов наклона



Фиг. 45. Аберрационное виьетирование в меридиональной плоскости в случае отсутствия дисторсии.

главных лучей с осью системы остается неизменным (т. е.: что сферическая аберрация в зрачках системы отсутствует), то величины  $y$  и  $y'$  и углы  $\beta$  и  $\beta'$  будут связаны формулами:

$$y = CA_0 \operatorname{tg} \beta; \quad y' = C'A'_0 \operatorname{tg} \beta'. \quad (266)$$

Составляя отношение  $y'$  к  $y$  и используя формулу (266), получаем:

$$\frac{y'}{y} = V_0 = \frac{\xi'_0}{\xi_0} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta'}{\operatorname{tg} \beta} = Q_0 \frac{\operatorname{tg} \beta'}{\operatorname{tg} \beta}. \quad (267)$$

Но так как  $Q_0$  согласно формуле (40) равно величине

$$Q_0 = -\frac{f'_0}{f_0} V_0 V_c, \quad (268)$$

то формула (267) может быть переписана в следующем виде:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta'}{\operatorname{tg} \beta} = -\frac{f_0}{f'_0 V_c} = W_c = \operatorname{const}. \quad (269)$$

Из формулы следует:

$$\operatorname{tg} \beta' = W_c \operatorname{tg} \beta. \quad (270)$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{n}{n' V_{tc}} \operatorname{tg} \beta. \quad (271)$$

Дифференцируя, получаем:

$$\frac{d\beta'_t}{\cos^2 \beta'} = \frac{n}{n' V_{tc}} \cdot \frac{d\beta_t}{\cos^2 \beta} = W_c \frac{d\beta_t}{\cos^2 \beta}, \quad (272)$$

причем в формулах (270), (271) и (272) величина  $W_c$  — угловое увеличение для нулевых лучей.

Угловое увеличение для меридионального пучка равно

$$W_{tc} = \frac{d\beta'_t}{d\beta_t}. \quad (273)$$

Сопоставляя формулы (273) и (272), можно написать:

$$W_{tc} = W_c \frac{\cos^2 \beta'}{\cos^2 \beta}; \quad (274)$$

эта формула связывает угловые увеличения для меридиональных и нулевых лучей.

Перейдем к определению меридионального линейного увеличения в зрчках  $V_{tc}$ , равного

$$\frac{\rho'_t}{\rho_t} = V_{tc}. \quad (275)$$

Линейное увеличение связано с угловым увеличением следующей формулой [формулы (14) и (23)]:

$$V_t W_t = - \frac{f_t \cos \beta'}{f'_t \cos \beta} = - \frac{f_t \cos \beta}{f_t \cos \beta'}. \quad (276)$$

Подставляя в формулу (276) значение углового увеличения из формулы (274), получаем:

$$V_{tc} = \frac{n \cos \beta}{n' W_{tc} \cos \beta'} = \frac{n \cos^3 \beta}{n' W_c \cos^3 \beta'}. \quad (277)$$

Для нулевых лучей угловое увеличение может быть выражено через линейное увеличение по формуле

$$W_c = - \frac{f_0}{f'_0 V_c} = \frac{n}{n' V_c}, \quad (278)$$

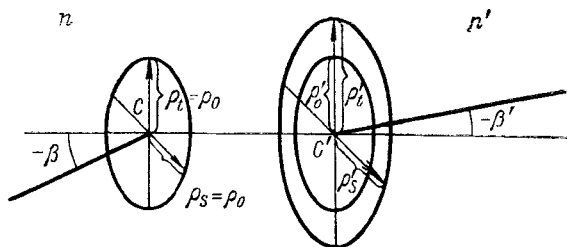
поэтому формула (277) может быть представлена в виде

$$V_{tc} = \frac{\cos^3 \beta}{\cos^3 \beta'} V_c. \quad (279)$$

Эта формула показывает, что меридиональное линейное увеличение  $V_{tc}$  в случае отсутствия дисторсии пропорционально отношению кубов косинусов углов поля зрения в пространстве предметов и пространстве изображений.



Перейдем к определению сагиттального линейного увеличения для зрачков. На фиг. 46  $\rho_t$  и  $\rho_t'$  — радиусы входного и выходного зрачков в меридиональной плоскости;  $\rho_s$  и  $\rho_s'$  — радиусы тех же зрачков в сагиттальной плоскости.



Фиг. 46. Аберрационное виньетирование в сагиттальной плоскости.

Для сагиттального углового увеличения в точках, лежащих на оси системы, имеем формулу

$$W_{sc} = \frac{\sin \beta'}{\sin \beta}, \quad (280)$$

тождественную формуле (248).

Для линейного же увеличения в сагиттальной плоскости для точек, лежащих на оси системы, имеем:

$$V_{sc} = \frac{n}{n' W_{sc}} = \frac{n \sin \beta}{n' \sin \beta'}. \quad (281)$$

На основании формулы (271) линейное увеличение в зрачках для нулевых лучей в случае ортоскопической системы может быть представлено в виде

$$V_c = \frac{n \operatorname{tg} \beta}{n' \operatorname{tg} \beta'}. \quad (282)$$

Сопоставляя формулы (281) и (282), можно выразить сагиттальное линейное увеличение в зрачках через линейное увеличение в зрачках для нулевых лучей:

$$V_{sc} = V_c \frac{\cos \beta}{\cos \beta'}. \quad (283)$$

Имея выражения для обоих линейных увеличений (сагиттального и меридионального) в зрачках, можно получить и выражение для аберрационного виньетирования в случае отсутствия дисторсии:

$$F(\beta) = \frac{V_{tc} V_{sc}}{V_c^2} = \frac{\cos^4 \beta}{\cos^4 \beta'}. \quad (284)$$

Полученная формула имеет весьма важное значение.

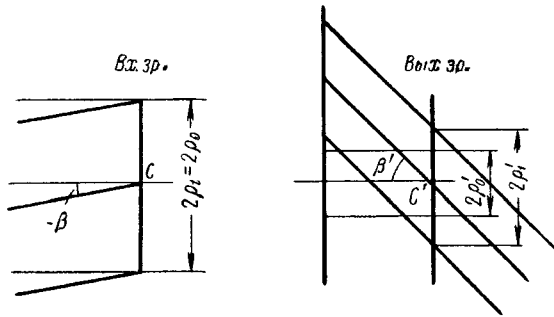
Действительно, в частном случае ортоскопической телескопической системы (например, зрительной трубы), показанной на фиг. 47 и имеющей достаточно большое видимое увеличение при большом

окулярном поле зрения (что будет соответствовать малому полю зрения в пространстве предметов), можно, не делая большой погрешности, заменить в формуле (284)  $\cos^4 \beta$  единицей; тогда абберационное виньетирование будет определяться только лишь величиной окулярного поля зрения.

Численно для окулярного поля зрения, равного  $2\beta' = 90^\circ$ , находим:

$$F(\beta) \cong \frac{1}{\cos^4 \beta'} = \frac{1}{\cos^4 45^\circ} = 4. \quad (285)$$

При отсутствии дисторсии площадь выходного зрачка на краю поля зрения возрастает по сравнению с площадью выходного зрачка для осевого пучка в четыре раза. Однако для большого числа зрительных



Фиг. 47. Абберационное виньетирование ортоскопической телескопической системы.

труб площадь выходного зрачка будет определяться площадью зрачка глаза наблюдателя (выходным зрачком системы является входной зрачок глаза); для этого случая нет необходимости пропускать и корректировать наклонный пучок на краю поля зрения для столь же большого зрачка в пространстве предметов, как и зрачок на оси системы.

Обращаясь к формуле (279), связывающей меридиональное линейное увеличение в зрачках с линейным увеличением в зрачках для нулевых лучей, и допуская, что для рассматриваемой телескопической системы, свободной от дисторсии, можно заменить аналогично предыдущему  $\cos^3 \beta$  единицей, получим:

$$V_{tc} \cong V_c \frac{1}{\cos^3 \beta'}. \quad (286)$$

Численно для рассматриваемого примера окулярного поля зрения  $90^\circ$

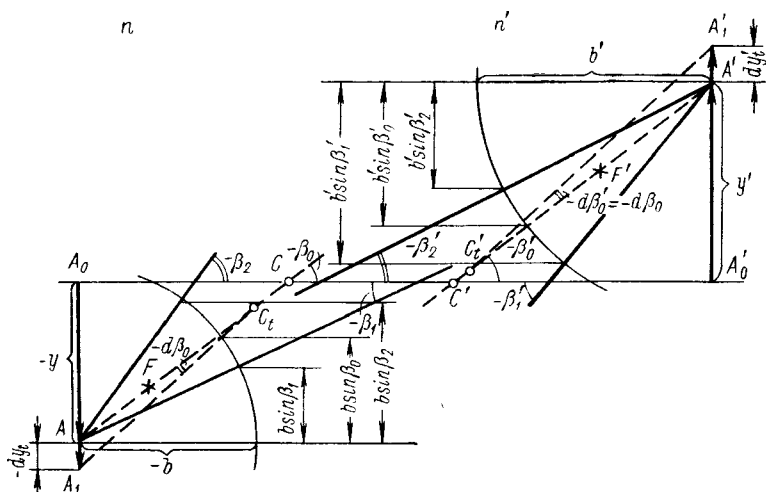
$$V_{tc} \cong \frac{V_c}{\cos^3 45^\circ} = 2\sqrt{2} V_c. \quad (287)$$

Таким образом, для полного использования площади входного зрачка глаза достаточно обеспечить ширину входящего в систему наклонного пучка на краю поля по его меридиональному сечению всего лишь на 35% от диаметра входного зрачка для осевого пучка.

ОБРАЗОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ ШИРОКИМИ ПУЧКАМИ ЛУЧЕЙ ПРИ БОЛЬШОМ ПОЛЕ ЗРЕНИЯ

§ 24. Образование изображения в меридиональной плоскости при отсутствии aberrаций, нарушающих резкость изображения, и отсутствии кривизны поля

Пусть на фиг. 48  $A_0A$  — предмет, плоский и перпендикулярный оси  $A_0A_0'$ ;  $A_0'A'$  — его изображение; величина предмета равна  $y$ ; величина изображения соответственно равна  $y'$ . Из вершины предмета  $A$  выходит широкий пучок лучей, ограниченный крайними лучами, составляющими с осью углы  $\beta_1$  и  $\beta_2$ .



Фиг. 48. Ход широкого наклонного пучка в меридиональной плоскости.

В пространстве изображений этот пучок лучей должен по условию сойтись в некоторой точке  $A'$ . Крайние лучи, ограничивающие этот пучок, соответственно составляют с осью системы углы  $\beta'_1$  и  $\beta'_2$ .

Обратим внимание на следующее. У верхнего луча, ограничивающего широкий пучок, входной угол больше, нежели выходной:

$$|\beta_2| > |\beta'_2|. \quad (288)$$

Наоборот, нижний луч пучка имеет входной угол меньший, чем выходной угол:

$$|\beta_1| < |\beta'_1|. \quad (289)$$

Из сопоставления неравенств (288) и (289) следует, что внутри широкого пучка должен существовать и такой луч, для которого входной и выходной углы будут равны друг другу. Для такого луча  $ACC'A'$

входной и выходной углы обозначим соответственно через  $\beta_0$  и  $\beta'_0$ . По условию выбора луча должно иметь место равенство

$$\beta_0 = \beta'_0. \quad (290)$$

Перемещая предмет вдоль луча  $ACC'A'$ , можно отыскать такую пару точек  $C_t$  и  $C'_t$ , для которых угловое меридиональное увеличение окажется равным единице:

$$W_t = \frac{d\beta'_t}{d\beta_t} = 1. \quad (291)$$

Эту пару точек  $C_t$  и  $C'_t$  будем называть, как обычно, узловыми.

Элементарные предмет и изображение в меридиональной плоскости будем обозначать соответственно через  $dy_t$  и  $dy'_t$ .

По условию отсутствия аберраций широкий пучок лучей, исходящий из вершины этого элементарного предмета — точки  $A_t$ , должен сойтись в одной и той же точке  $A'_t$ , которая и будет являться вершиной элементарного меридионального изображения.

Поэтому меридиональное линейное увеличение в точках  $A$  и  $A'$  должно быть одинаковым для всех лучей пучка независимо от выбора луча в пучке. В силу этого можно записать:

$$V_t = \frac{dy'_t}{dy_t} = \text{const}. \quad (292)$$

Напишем выражение для теоремы Штраубеля в меридиональной плоскости:

$$n' dy'_t \cos \beta' d\beta'_t = n dy_t \cos \beta d\beta_t. \quad (293)$$

Формула (293) представляет собой дифференциальное уравнение, связывающее величины  $\beta$  и  $\beta'$ .

Интегрируя формулу (293), можно написать:

$$\frac{n'}{n} V_t \int_{\beta'_1}^{\beta'_2} \cos \beta' d\beta' = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos \beta d\beta. \quad (294)$$

Выполняя интегрирование и подставляя значения переменных, получаем:

$$\frac{n'}{n} V_t [\sin \beta'_2 - \sin \beta'_1] = \sin \beta_2 - \sin \beta_1. \quad (295)$$

Формула (295) получена для предмета и изображения, перпендикулярных оси системы.

Если предположить, что углы  $\beta_1$  и  $\beta'_1$  суть текущие координаты, то тем самым можно установить зависимость между ходом любого из лучей широкого пучка до и после системы.

Обратимся к лучу, составляющему одинаковые углы с осью системы в пространствах предметов и изображений.

Из фиг. 48 следует:

$$dy'_t = -\frac{C'_t A' d\beta_0}{\cos \beta_0}; \quad dy_t = -\frac{C_t A d\beta_0}{\cos \beta_0}. \quad (296)$$

Деля выражения (296) друг на друга, находим для меридионального линейного увеличения

$$V_t = \frac{C_t' A'}{C_t A}. \quad (297)$$

Пользуясь формулами (295) и (297), получаем:

$$n' C_t' A' (\sin \beta_2' - \sin \beta_1') = n C_t A (\sin \beta_2 - \sin \beta_1). \quad (298)$$

Дадим формуле (297) геометрическую интерпретацию. Проведем из точек  $A$  и  $A'$  дуги: в пространстве предметов — радиусом  $b = n C_t$  и в пространстве изображений — радиусом  $b' = n' A' C_t'$  (на фиг. 48 условно радиусы этих дуг взяты меньшими, нежели отрезки  $AC_t$  и  $A'C_t'$ , что принципиально возможно лишь в случае, если  $n$  и  $n'$  меньше единицы). Вводя в формулу (298) выражения произведений  $b$  и  $b'$ , получаем после раскрытия скобок:

$$b' \sin \beta_2' - b' \sin \beta_1' = b \sin \beta_2 - b \sin \beta_1. \quad (299)$$

Обращаясь к фиг. 48, видим, что разность произведений  $b \sin \beta$  представляет проекцию (на плоскость предмета) расстояния между точками пересечения лучами дуги радиуса  $b$ . Аналогично для пространства изображений эта же самая разность произведений представляет собой проекцию на плоскость изображений расстояния между точками пересечения выходящих лучей с дугой радиуса  $b'$ . Обе эти проекции оказываются равными друг другу.

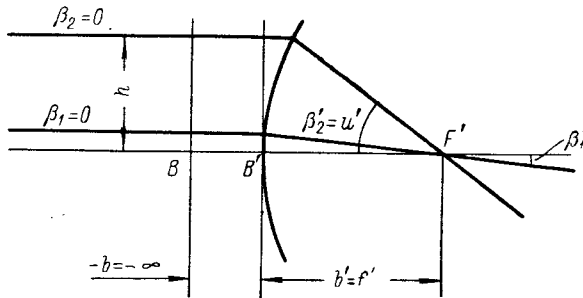
Это свойство проекций точек пересечения входящих и выходящих из системы лучей с соответственными дугами, аналогичное свойству равенства предмета и изображения на главных плоскостях для нулевых лучей, дает основание называть построенные дуги **главными дугами** широкого пучка.

В отличие от главных линий для узких пучков (как нулевых, так и сагиттальных и меридиональных) главные дуги для широких пучков зависят от положения предмета. При перемещении предмета вдоль главного луча будут меняться радиусы главных дуг, хотя сами дуги (для тонких систем) лежащими на главном луче вершинами по-прежнему будут касаться друг друга. Главные дуги в отличие от главных плоскостей нельзя рассматривать как предмет и изображение, хотя точки пересечения главного луча, составляющего с осью системы равные углы, с главными дугами являются изображением друг друга.

Рассмотрим частный случай, когда предметная точка лежит на оси системы в бесконечности (фиг. 49). В этом случае отрезок  $b$  от передней главной дуги или сферы до предметной точки обращается в бесконечность; углы  $\beta_1$  и  $\beta_2$  обоих лучей, входящих в систему, обращаются в нуль; однако выражение, стоящее в правой части формулы (299), остается конечным и, если один из входящих в систему лучей совпадает с ее осью, определяет высоту  $h$  входящего в систему луча.

В левой части формулы (299) угол  $\beta_1'$  для луча, совпадающего с осью, также будет равен нулю, и в левой части останется лишь произведение величины синуса угла  $\beta_2'$ , играющего роль выходного апертурного угла  $u'$ , на отрезок  $b'$ , равный заднему фокусному расстоянию нашей системы.

Отрезок  $b'$ , будучи постоянным для всех лучей рассматриваемого пучка, должен сохранить свое значение и для случая малой величины  $h$ , когда отношение высоты к соответствующему апертурному углу определяет величину фокусного расстояния системы согласно формуле (164), переходящей при малом поле зрения в формулу для фокусного расстояния на оси системы.



Фиг. 49. Главные сферы при предмете, расположенном в бесконечности.

Для системы, скорректированной на сферическую aberrацию и условие синусов, при предмете, лежащем в бесконечности, заднее фокусное расстояние определится как отношение высоты луча, входящего в систему параллельно оси, к синусу выходного апертурного угла:

$$f' = \frac{h}{\sin u'} . \quad (299a)$$

## Глава VIII

### СВЕТСИЛА И СВЕТОРАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО ПОЛЮ ЗРЕНИЯ

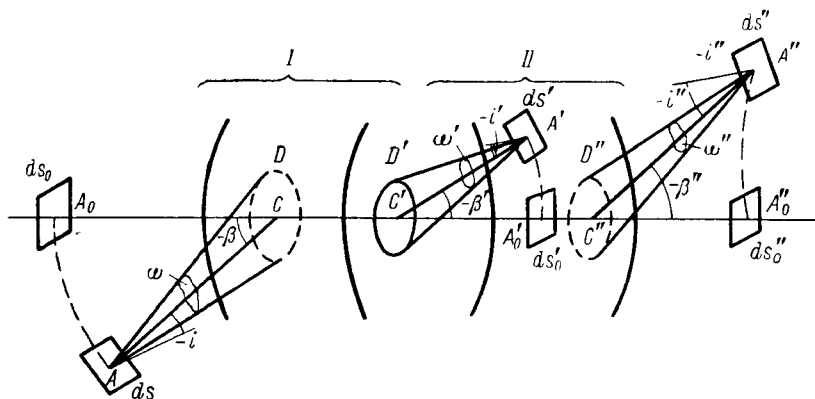
#### § 25. Светораспределение по полю зрения в случае тонких световых пучков

Предположим, что имеются две оптические системы (фиг. 50) *I* и *II* с одной общей осью, расположенные друг за другом таким образом, что изображение после системы *I* является предметом для системы *II*. При этом выходной зрачок системы *I* является входным зрачком для системы *II* и представляет единственную материальную диафрагму, ограничивающую световые пучки, проходящие через обе системы в пределах рассматриваемого поля зрения.

Будем полагать предмет и оба изображения (после системы *I* и после *I* и *II*) строго гомоцентрическими; других ограничений (отсутствие кривизны поверхности предмета и изображения, отсутствие дисторсии и т. п.), касающихся свойств предмета и обоих изображений, делать не будем.

Яркость поверхности предмета будем полагать равномерной и удовлетворяющей закону Ламберта.

На фиг. 50  $ds$ ,  $ds'$  и  $ds''$  — элементы предмета и сопряженные с ним элементы первого и второго изображений;  $D$ ,  $D'$  и  $D''$  — входной зрачок системы  $I$ , материальная диафрагма и выходной зрачок системы  $II$  (площади обоих зрачков и диафрагмы предполагаются малыми);  $i$ ,  $i'$  и  $i''$  — углы между нормальными элементами предмета и его обоих изображений и осями соответствующих световых пучков;  $\beta$ ,  $\beta'$  и  $\beta''$  — углы между осями световых пучков и осью самой системы.



Фиг. 50. Вывод формул для светораспределения по полю зрения составной системы.

Напишем общее выражение для светового потока, излучаемого элементом  $ds$  и проходящего через обе системы (пренебрегая потерями света в последних). Имеем согласно закону Ламберта

$$dF = B \cos i \, d\omega \, ds = B \cos i' \, d\omega' \, ds' = B \cos i'' \, d\omega'' \, ds''. \quad (300)$$

Переходя к освещенностям после систем  $I$  и  $II$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} E' &= \frac{dF}{ds'} = B \cos i \, d\omega \frac{ds}{ds'} = B \cos i' \, d\omega' = B \cos i'' \, d\omega'' \frac{ds''}{ds'}; \\ E'' &= \frac{dF}{ds''} = B \cos i \, d\omega \frac{ds}{ds''} = B \cos i' \, d\omega' \frac{ds'}{ds''} = B \cos i'' \, d\omega'', \end{aligned} \right\} (301)$$

откуда следует:

$$E' \, ds' = E'' \, ds''. \quad (302)$$

Перенесем элемент  $ds$  на ось системы в положение  $ds_0$ ; элементы сопряженного ему изображения  $ds'_0$  после системы  $I$  и  $ds''_0$  после системы  $II$  также окажутся на оси системы; полагая элемент предмета  $ds_0$  перпендикулярным оси системы, определим перпендикулярность оси системы и элементов первого и второго изображений  $ds'_0$  и  $ds''_0$ . Тогда для освещенностей на оси системы  $E'_0$  и  $E''_0$  находим:

$$\left. \begin{aligned} E'_0 &= B \, d\omega'_0 = B \, d\omega''_0 \frac{ds''_0}{ds'_0}; \\ E''_0 &= B \, d\omega'_0 \frac{ds'_0}{ds''_0} = B \, d\omega''_0. \end{aligned} \right\} (303)$$

Составим отношения величин  $E'$  и  $E''$  к величинам  $E'_0$  и  $E''_0$  — распределение освещенности после систем  $I$  и  $II$ .

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \Phi' &= \frac{E'}{E'_0} = \cos i' \frac{d\omega'}{d\omega'_0} = \cos i'' \frac{d\omega''}{d\omega''_0} \cdot \frac{ds''}{ds''_0} \cdot \frac{ds'_0}{ds'_0} \\ \Phi'' &= \frac{E''}{E''_0} = \cos i' \frac{d\omega'}{d\omega'_0} \cdot \frac{ds'}{ds'_0} \cdot \frac{ds''_0}{ds''_0} = \cos i'' \frac{d\omega''}{d\omega''_0} \end{aligned} \right\} \quad (304)$$

Из формул (304) следует:

$$\Phi'' = \Phi' \frac{ds'}{ds'_0} \cdot \frac{ds''_0}{ds''_0}, \quad (305)$$

и, в более симметричном виде,

$$\Phi'' \frac{ds''_0}{ds''_0} = \Phi' \frac{ds'}{ds'_0}. \quad (306)$$

Это выражение инвариантно и может быть распространено на любое число систем; оно не связано с помещением диафрагмы после системы  $I$ ; материальная диафрагма может быть помещена в любом месте.

Перейдем к рассмотрению ряда частных случаев.

В случае равенства  $ds' = ds'_0$ ;  $ds'' = ds''_0$  и т. д. инвариант светораспределения приобретает особенно простой вид:

$$\Phi'' = \Phi'; \quad (307)$$

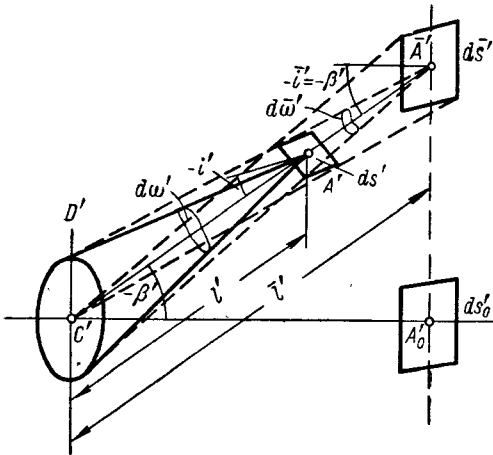
светораспределение после каждой из составляющих систем сохраняется неизменным.

Случай равенства величин  $ds' = ds'_0$ ;  $ds'' = ds''_0$  может иметь место, например, тогда, когда каждая из составляющих систем

дает плоское и неискаженное изображение плоского предмета, перпендикулярного оси системы.

Однако условие ортоскопичности составляющих систем даже и при неплоских промежуточных изображениях приводит к выражению, аналогичному формуле (307), при условии определения освещенности на плоскости, проходящей через элементы изображения, лежащие на оси системы.

Рассмотрим выражение вида  $\Phi \frac{ds}{ds_0}$  более детально. На фиг. 51  $D'$  — выходной зрачок системы;  $ds'$  — реальный элемент изображения;



Фиг. 51. Установление зависимости между величинами пространственных элементов изображения и их проекциями на гауссову плоскость.



$d\bar{s}'$  — коническая проекция этого элемента на плоскость, перпендикулярную оси системы и проходящую через элемент  $d\bar{s}'$ ;  $d\omega'$  — соответственно телесный угол пучка, сходящегося к реальному элементу  $ds'$ , и  $d\bar{\omega}'$  — телесный угол пучка, сходящегося к проекции этого элемента  $d\bar{s}'$ .

Расстояния вдоль оси пучка от центра зрачка до элемента  $ds'$  и его проекции  $d\bar{s}'$  пусть будут  $l'$  и  $\bar{l}'$ . Тогда можно написать:

$$\frac{\cos i' ds'}{\cos \beta' d\bar{s}'} = \frac{l'^2}{\bar{l}'^2}. \quad (308)$$

Составив отношение телесных углов  $d\omega'$  и  $d\bar{\omega}'$ , имеем:

$$\frac{d\omega'}{d\bar{\omega}'} = \frac{D' \cos \beta'}{l'^2} \cdot \frac{\bar{l}'^2}{D' \cos \beta'} = \frac{\bar{l}'^2}{l'^2}. \quad (309)$$

Перемножив формулы (308) и (309), найдем:

$$\frac{\cos i' ds' d\omega'}{\cos \beta' d\bar{s}' d\bar{\omega}'} = 1 \quad (310)$$

или

$$\cos i' ds' d\omega' = \cos \beta' d\bar{s}' d\bar{\omega}' \quad (311)$$

Возвращаясь к формулам (304), можно написать:

$$\left. \begin{aligned} \Phi' &= \cos \beta' \frac{d\bar{s}' d\bar{\omega}'}{ds' d\omega'_0} = \cos \beta'' \frac{d\bar{\omega}'' d\bar{s}'' ds'_0}{d\omega''_0 ds''_0 ds'_0} \\ \Phi'' &= \cos \beta' \frac{d\bar{\omega}' d\bar{s}' ds''_0}{d\omega'_0 ds'_0 ds''_0} = \cos \beta'' \frac{d\bar{\omega}'' d\bar{s}''}{d\omega''_0 ds''_0} \end{aligned} \right\} \quad (312)$$

откуда

$$\Phi' \frac{ds'}{ds'_0} = \Phi'' \frac{ds''}{ds''_0} = \cos \beta' \frac{d\bar{\omega}' d\bar{s}'}{d\omega'_0 ds'_0} = \cos \beta'' \frac{d\bar{\omega}'' d\bar{s}''}{d\omega''_0 ds''_0}. \quad (313)$$

Формула (313) тоже инвариантна; обращая внимание на коэффициенты при отношениях  $\frac{d\bar{s}}{ds_0}$ , видим, что эти коэффициенты напоминают выражения для  $\Phi$  и отличаются от них заменой углов  $i$  на  $\beta$  и величин  $d\omega$  и  $ds$  на  $d\bar{\omega}$  и  $d\bar{s}$ . Введем для этих коэффициентов обозначения  $\bar{\Phi}$ . Получим:

$$\Phi' \frac{ds'}{ds'_0} = \Phi'' \frac{ds''}{ds''_0} = \bar{\Phi}' \frac{d\bar{s}'}{ds'_0} = \bar{\Phi}'' \frac{d\bar{s}''}{ds''_0}. \quad (314)$$

Этот инвариант еще более общ, нежели инвариант (306), и позволяет для определения функций  $\Phi$  (относящихся к светораспределению на поверхности изображений любой формы) пользоваться функциями  $\bar{\Phi}$ , относящимися к светораспределению на плоскостях, перпендикулярных к оси системы и проходящих через элементы  $d\bar{s}_0$ .

Если составляющие системы принять ортоскопическими, что соответствует равенствам  $d\bar{s}' = ds'_0$ ;  $d\bar{s}'' = ds''_0$  и т. д., формула (314) примет вид

$$\Phi' = \bar{\Phi}''. \quad (315)$$

Из формулы (315) следует, что светораспределение на плоскостях, перпендикулярных оси, после каждой из систем также сохранится неизменным.

Возвратимся к определению функций:

$$\bar{\Phi}' = \cos \beta' \frac{d\bar{\omega}'}{d\omega_0'} \quad \text{и} \quad \bar{\Phi}'' = \cos \beta'' \frac{d\bar{\omega}''}{d\omega_0''}. \quad (316)$$

Развертываем выражения  $d\bar{\omega}$  и  $d\omega_0$ :

$$d\bar{\omega} = \frac{D \cos \beta}{l^3} = \frac{D \cos^3 \beta}{l_0^3}; \quad d\omega_0 = \frac{D_0}{l_0^3}, \quad (317)$$

откуда

$$\frac{d\bar{\omega}}{d\omega_0} = \frac{D}{D_0} \cos^3 \beta. \quad (317a)$$

Формулы (316) можно представить в виде

$$\bar{\Phi}' = \frac{D'}{D_0'} \cos^4 \beta'; \quad \bar{\Phi}'' = \frac{D''}{D_0''} \cos^4 \beta'' \quad (318)$$

или, заменяя отношения  $\frac{D}{D_0}$  на  $F(\beta)$ , в виде

$$\bar{\Phi}' = F'(\beta') \cos^4 \beta'; \quad \bar{\Phi}'' = F''(\beta'') \cos^4 \beta''. \quad (319)$$

Для случая материальной диафрагмы  $F'(\beta')$  обращается в единицу

$$F'(\beta') = \frac{D'}{D_0'} = 1, \quad (320)$$

и тогда

$$\bar{\Phi}' = \cos^4 \beta'. \quad (321)$$

Возвращаясь к формуле (315), находим:

$$\bar{\Phi}'' = \bar{\Phi}' = \cos^4 \beta'. \quad (322)$$

Таким образом, для случая совокупности ортоскопических составляющих систем светораспределение определится четвертой степенью косинуса угла между осью пучка и осью системы в пространстве, где размещена материальная диафрагма.

Задавая величиной светораспределения  $\bar{\Phi}$ , можно определить величину внутреннего поля зрения (у материальной диафрагмы):

$$\cos \beta' = \sqrt[4]{\bar{\Phi}}. \quad (323)$$

Численно, задавая  $\bar{\Phi}'' = \Phi'' = 0,1$  (освещенность на краю поля составляет 10% от освещенности в центре поля), определяем угол поля зрения  $2\beta'$ :

$$\cos \beta' = \sqrt[4]{0,1} = 0,563; \quad \beta' = 55^\circ 20'; \quad 2\beta' \cong 110^\circ.$$

Перейдем к рассмотрению случая, когда отношение элементов

$$\frac{ds}{ds_0} \neq 1 \quad (\text{фиг. 52}).$$

Площадь элемента  $ds'_0$  определяется из выражения

$$ds'_0 = y'_0 d\gamma dy'_0. \quad (324)$$

Аналогично

$$d\bar{s}' = \bar{y}' d\gamma d\bar{y}' \quad (325)$$

и отношение

$$\frac{d\bar{s}'}{ds'_0} = \frac{\bar{y}' d\bar{y}'}{y'_0 dy'_0}. \quad (326)$$

Формулу же (314) можно представить в виде

$$\bar{\Phi}' \frac{\bar{y}' d\bar{y}'}{y'_0 dy'_0} = \bar{\Phi}'' \frac{\bar{y}'' d\bar{y}''}{y''_0 dy''_0}. \quad (327)$$

Левая часть формулы (324) не может быть преобразована таким же способом, так как в общем случае искривленного изображения величина  $dy'$  уже не будет лежать на этой искривленной поверхности.

Полагая, что вся система обладает плоским полем и исправлена на дисторсию, получим:

$$\bar{y}'' = y''_0 \text{ и } d\bar{y}'' = dy''_0. \quad (328)$$

Помня, что в этом случае  $\bar{\Phi}''$  переходит в  $\Phi''$ , найдем:

$$\Phi'' = \bar{\Phi}'' = \bar{\Phi}' \frac{\bar{y}' dy'}{y'_0 dy'_0}. \quad (329)$$

Формула (329) выражает светораспределение всей системы в совокупности, как произведение из условного светораспределения части системы, лежащей впереди материальной диафрагмы, и функции, определяемой величиной дисторсии передней части системы.

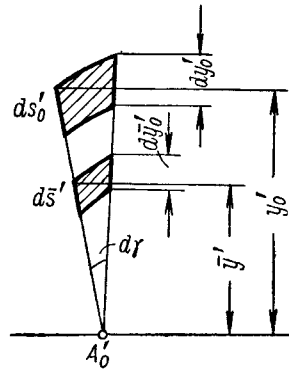
В случае отрицательной дисторсии системы I ( $\bar{y}' < y'_0$ ) обычно будет иметь место и неравенство дифференциалов:  $d\bar{y}' < dy'_0$ ; поэтому множитель при светораспределении  $\bar{\Phi}'$  первой системы меньше единицы, в силу чего светораспределение всей системы  $\Phi''$  меньше светораспределения передней части системы  $\bar{\Phi}'$ .

Наличие положительной дисторсии дало бы более благоприятный результат, так как светораспределение всей системы получилось бы тогда большим, нежели светораспределение после первой части системы  $\bar{\Phi}'$ .

## § 26. Светосила системы при широких пучках лучей

Предположим, что имеется оптическая система (фиг. 53), работающая в широких пучках лучей.

На фиг. 53  $ds$  — элемент предмета, перпендикулярный оси;  $ds'$  — его изображение (предполагается, что система скорректирована на



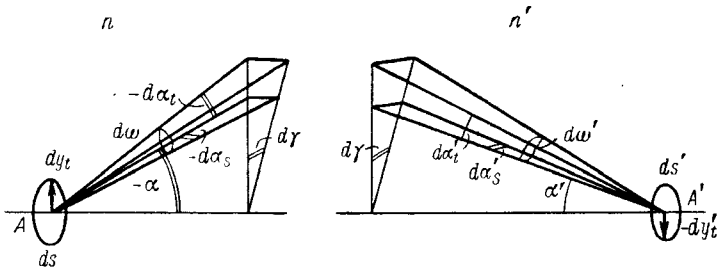
Фиг. 52. Изменение площади элемента изображения в связи с дисторсией.

величиной дисторсии

сферическую aberrацию и условие синусов);  $\alpha$  — апертурный угол в пространстве предметов;  $\alpha'$  — апертурный угол в пространстве изображений;  $dy$  — линейный элемент предмета;  $dy'$  — его изображение.

Образует элементарные телесные углы  $d\omega$  и  $d\omega'$  соответственно в пространстве предметов и пространстве изображений.

Для этого повернем плоскость фигуры вокруг оси системы на некоторый элементарный угол  $d\gamma$  и дадим элементарные приращения апертурным углам  $d\alpha_t$  и  $d\alpha_s$ .



Фиг. 53. Вывод выражения для светосилы системы, работающей в широких пучках.

Пусть яркость предмета постоянна по всем направлениям и равна  $B$ ; среда, в которой расположен предмет, имеет показатель преломления, равный  $n$ ; показатель преломления пространства изображений примем равным  $n'$ .

Составим выражение для элементарного светового потока:

$$dF = n^2 B \cos \alpha \, d\omega \, ds. \quad (330)$$

Согласно условию синусов

$$\frac{n \sin \alpha}{n' \sin \alpha'} = V = \text{const}, \quad (331)$$

или

$$n \sin \alpha = V n' \sin \alpha'. \quad (332)$$

Дифференцируя, получаем связь между углами  $d\alpha_t$  и  $d\alpha'_t$ :

$$n \cos \alpha \, d\alpha_t = V n' \cos \alpha' \, d\alpha'_t. \quad (333)$$

Из фиг. 53 можно установить связь между сагиттальными элементарными углами  $d\alpha_s$  и  $d\alpha'_s$ :

$$d\alpha_s = d\gamma \sin \alpha; \quad d\alpha'_s = d\gamma \sin \alpha' \quad (334)$$

или

$$\frac{d\alpha_s}{\sin \alpha} = \frac{d\alpha'_s}{\sin \alpha'}. \quad (335)$$

Элементарные телесные углы  $d\omega$  и  $d\omega'$  легко определяются, как произведения соответствующих элементарных апертурных углов:

$$d\omega = d\alpha_s \, d\alpha_t; \quad d\omega' = d\alpha'_s \, d\alpha'_t. \quad (336)$$

Для вычисления полного светового потока, входящего в систему, необходимо осуществить интегрирование элементарного светового потока во всем телесном угле, принимаемом системой. Таким образом, полный световой поток, вошедший в систему, равен

$$F = \int_{\Omega} n^2 B \cos \alpha \, d\omega \, ds. \quad (337)$$

В рассматриваемом частном случае телесный угол определяется круговым конусом, образующая которого составляет с осью системы апертурный угол  $u$ . Это позволяет заменить интеграл по телесному углу двойным интегралом, взятым в пределах от 0 до  $2\pi$  и от 0 до  $u$ :

$$F = \int_0^{2\pi} \int_0^u n^2 B \cos \alpha \, d\omega \, ds. \quad (338)$$

Подставляя в формулу (338) значения элементарных телесных углов из формулы (336), находим:

$$F = \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^u n^2 B \cos \alpha \sin \alpha \, d\alpha \, ds \quad (339)$$

и после интегрирования

$$F = \pi B n^2 \sin^2 u \, ds. \quad (340)$$

Полагая, что система имеет коэффициент пропускания, равный  $\tau$ , получаем выражение для светового потока, вышедшего из системы:

$$F' = \tau F = \pi \tau B n^2 \sin^2 u \, ds. \quad (341)$$

Выходящий из системы световой поток должен распределиться на площади элемента изображения  $ds'$ . Составляя отношение величины выходящего светового потока к площади элемента изображения, находим освещенность изображения:

$$E' = \frac{F'}{ds'} = \pi \tau B n^2 \sin^2 u \frac{ds}{ds'}. \quad (342)$$

Помня, что отношение площадей элемента изображения к площади элемента предмета равно квадрату линейного увеличения  $V^2$ , получаем:

$$E' = \pi \tau B \frac{n^2 \sin^2 u}{V^2} = \pi \tau B n'^2 \sin^2 u'. \quad (343)$$

Составляя отношение освещенности к яркости, определяем светосилу системы:

$$H = \frac{E'}{B} = \pi \tau n'^2 \sin^2 u'. \quad (344)$$

Формула (344) показывает, что светосила системы, работающей в широком пучке лучей, определяется квадратом выходной числовой апертуры и не зависит от величины входной апертуры.

Если предмет лежит в бесконечности, величина выходной апертуры определяется (в случае системы, исправленной на сферическую аберрацию и условие синусов) отношением радиуса входного зрачка к заднему фокусному расстоянию системы:

$$n' \sin u' = \frac{h_1}{f_0}. \quad (345)$$

Заменяя в формуле (344) апертурный угол его значением, полученным из формулы (345), получаем, что в случае предмета, расположенного в бесконечности, светосила системы определяется квадратом ее относительного отверстия.

## § 27. Потери на отражение от поверхностей линз

Потери на отражение от поверхностей линз определяются коэффициентом отражения преломляющей поверхности, вычисляемым согласно формуле Френеля:

$$\rho = \frac{dF_1}{dF} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin^2(i-i')}{\sin^2(i+i')} + \frac{\operatorname{tg}^2(i-i')}{\operatorname{tg}^2(i+i')} \right\}, \quad (346)$$

где  $i$  и  $i'$  — углы падения и преломления на рассматриваемой преломляющей поверхности. Преобразуем формулу (346); вынося за скобку отношение квадратов синусов, получаем:

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{\sin^2(i-i')}{\sin^2(i+i')} \left\{ 1 + \frac{\cos^2(i+i')}{\cos^2(i-i')} \right\}. \quad (347)$$

Если углы  $i$  и  $i'$  малы, то

$$ni = n'i', \quad (348)$$

а формула (347) может быть представлена в виде

$$\rho = \left( \frac{n' - n}{n' + n} \right)^2. \quad (349)$$

Формула (349) показывает, что при малых углах падения и преломления потери на отражение не зависят от величины этих углов и определяются величинами показателей преломления по обе стороны рассматриваемой преломляющей поверхности.

Однако, если углы  $i$  и  $i'$  велики, величины потерь света на отражение существенно возрастают; например, если один из углов  $i$  окажется равным  $45^\circ$ , потери на отражение равны:

$$\rho_{i=45^\circ} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \operatorname{tg} i'}{1 + \operatorname{tg} i'} \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{1 - \operatorname{tg} i'}{1 + \operatorname{tg} i'} \right)^2 \right]. \quad (350)$$

В частном случае, когда разность углов падения и преломления все же остается малой (преломление происходит на поверхности, разде-

ляющей среды с малой разностью показателей преломления), величина потерь на отражение может быть определена по формуле

$$\rho = \frac{1 + \cos^2 2i}{2 \sin^2 2i} \left(1 - \frac{n}{n'}\right)^2 \lg^2 i. \quad (351)$$

Или, выражая  $\rho$  через показатели преломления для одного из углов  $i = 45^\circ$ :

$$\rho_{i=45^\circ} = \frac{1}{2} \left(\frac{n' - n}{n'}\right)^2 \cong 2 \left(\frac{n' - n}{n' + n}\right)^2 = 2\rho_{i=0}, \quad (352)$$

находим, что потери на отражение возрастут против потерь на отражение при нормальном ходе луча примерно вдвое.

## § 28. Просветление оптики

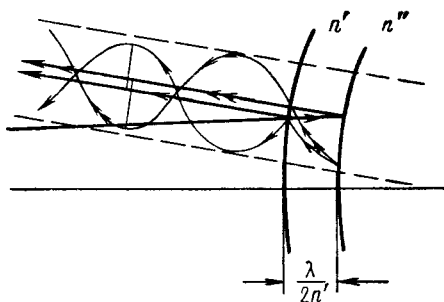
Потери на отражение могут быть снижены следующим образом.

Поверхность, разделяющая среды с большой разностью показателей преломления, покрывается тонкой пленкой, показатель преломления которой подбирается с таким расчетом, чтобы потери на отражение от обеих поверхностей пленки (например, пленка — воздух и пленка — стекло) были приблизительно равны друг другу (фиг. 54).

Толщину пленки подбирают таким образом, чтобы разность хода для обоих световых пучков, отраженных пленкой, оказалась равной половине длины волны. Оба отраженных пленкой световых потока, интерферируя друг с другом, должны взаимно погаситься и тем самым свести к нулю суммарную потерю света на отражение от обеих поверхностей пленки.

Такое уничтожение потерь света на отражение может быть осуществлено лишь для какой-либо одной длины волны и какого-либо одного угла падения. Для других длин волн и других наклонов луча уже не произойдет полного уничтожения потерь света на отражение. Кроме того, не всегда имеется возможность подобрать нужное значение показателя преломления пленки к заданному показателю преломления стекла. Однако эффект, создаваемый просветлением оптики, существенно снижает потери света на отражение от поверхностей линз, граничащих с воздухом.

Например, коэффициент отражения  $\rho$  на преломляющей поверхности стекла при использовании различных просветляющих покрытий, уменьшается до следующих значений.



Фиг. 54. Интерференция пучков, отражаемых от поверхностей просветляющей пленки.

1. При однослойном химическом просветлении (травлением поверхности стекла слабым раствором одной из кислот — азотной, соляной или уксусной):

$n_D$	1,5—1,52	1,53—1,55	1,56—1,60	1,61—1,64	1,65—1,70	1,71—1,75
$\rho$ в %	3,1—2,7	2,6—2,3	2,2—2,0	1,9—1,8	1,7—1,4	1,3—1,0

2. При однослойном физическом просветлении (нанесение пленки фтористого магния испарением в вакууме):

$n_D$	1,55	1,56—1,60	1,61—1,65	1,66—1,70	1,70
$\rho$ в %	1,6	1,4	1,0	0,9	0,6

3. При двухслойном и трехслойном химическом просветлении (например, нанесением пленок из растворов этиловых эфиров ортокремневой и ортотитановой кислот) коэффициент отражения  $\rho$  не зависит от показателя преломления  $n_D$  и имеет значения:

для двухслойного покрытия . . . . .  $\rho = 1,0 - 1,2\%$   
 для трехслойного покрытия . . . . .  $\rho = 0,5 - 0,8\%$

Для сопоставления приведем значения коэффициентов отражения для непросветленных поверхностей, вычисленных по формуле (349):

$n_D$	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75
$\rho$ в %	4,00	4,65	5,3	6,0	6,7	7,4

На границе раздела двух сред (поверхности склейки) ввиду малой разности показателей  $n' - n$  коэффициент отражения  $\rho$  невелик; так, при  $n = 1,5$  и  $n' = 1,6$   $\rho = 0,1\%$ .

## § 29. Потери света на поглощение в стекле

Оптическое стекло не является абсолютно прозрачной средой; световой поток, проходя через оптическое стекло, снижает свою яркость; возникают так называемые потери на поглощение.

Полагая яркость в некоторой точке пути светового потока равной  $B$  и в некоторой бесконечно близкой точке, находящейся на расстоянии



$dl$  от первой, равной  $B - dB$ , можно написать, имея в виду, что  $dB$  пропорционально  $B$  и  $dl$ :

$$dB = -kB dl, \quad (353)$$

откуда

$$\int \frac{dB}{B} = \lg B = -kl + c, \quad (354)$$

Полагая  $l=0$ , находим:

$$c = \lg B_{l=0} = \lg B_0; \quad (355)$$

таким образом,

$$B = B_0 e^{-kl}; \quad (356)$$

заменяя  $e^{-k}$  через  $\tau$  (называемый коэффициентом пропускания), получаем

$$B = B_0 \tau^l. \quad (357)$$

Полагая  $l = 1$  см, получаем для величины падения яркости на 1 см длины хода луча в стекле:

$$\Delta B = B - B_0 = B_0(1 - \tau). \quad (358)$$

Величину  $1 - \tau$  называют коэффициентом поглощения.

В табл. 2 даны значения коэффициента поглощения, согласно ГОСТ 3514—57, для различных категорий оптического стекла.

Таблица 2

Категория стекла	Коэффициент поглощения
00	До 0,004
0	0,006
1	0,008
2	0,010
3	0,015

К числу марок стекол нулевой категории относятся флинты (вся группа), почти все тяжелые флинты и ряд кронов; к первой категории — вся группа тяжелых кронов и группа баритовых флинтов; некоторые тяжелые кроны и легкие флинты относятся ко второй категории по коэффициенту поглощения и к третьей категории — только

небольшое число марок стекла по ГОСТ 3514—57. При приближенных подсчетах можно принять, что почти все марки оптического стекла поглощают на 1 см хода луча не более 1% яркости светового потока.

УЧЕНИЕ ОБ АБЕРРАЦИЯХ

Глава IX

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ВОЛНОВОЙ ТЕОРИИ СВЕТА

§ 30. Основные определения

К основным вопросам разработки оптических систем относится вопрос об оценке качества изображения и оценке совершенства создаваемой оптической системы.

Решение этого вопроса в отличие от других вопросов, встречающихся при разработке оптических систем (например, расчет габаритов оптической системы, расчет энергетического баланса системы), невозможно осуществить только на основании лучевой или геометрической оптики. Оценка качества изображения требует учета явлений, природа которых не может быть раскрыта в рамках геометрической или лучевой оптики и требует использования волновой теории света.

К числу таких вопросов можно отнести вопросы о разрешающей способности оптической системы, о глубине изображения.

В силу этих соображений мы вынуждены отказаться от общепринятого определения аберраций как отступления пучков лучей от гомотричности. Под аберрациями будем понимать те факторы, которые вызывают отступление качества изображения от наилучшего физически возможного.

Примем, что источник света или светящаяся точка является источником электромагнитных колебаний, что эти колебания распространяются в пространстве с течением времени и что известны скорость распространения света, длина его волны, а также изменение скорости распространения в различных средах.

Возьмем некоторую светящуюся точку  $S$  и предположим, что колебательный процесс в этой точке подчиняется закону

$$U = a \cos \frac{2\pi}{T} t, \quad (359)$$

где  $a$  — амплитуда колебаний;  
 $T$  — период колебаний;  
 $t$  — время.

Если время  $t_1 = T$ ;  $t_2 = 2T$ ;  $t_3 = 3T$  и т. д., то из формулы (359) следует, что состояние колебательного процесса в эти моменты времени будет иметь одни и те же значения, или одну и ту же фазу колебания.

За промежутки времени  $t_1, t_2$  и т. д. световые колебания успевают распространиться на некоторые расстояния  $l_1, l_2, l_3$  и т. д. Эти расстояния равны соответственно:  $l_1 = t_1 c_1$ ;  $l_2 = t_2 c_2$  и т. д., если принять, что скорости распространения света в общем случае могут быть различными.

Излучение света от светящейся точки происходит по всем направлениям. На любом из этих направлений можно определить положение точек, соответствующее распространению колебаний в момент времени  $t$ .

Если (фиг. 55)  $A_i, B_i, C_i$  — точки, определяющие распространение колебательного процесса из источника света  $S$  в момент времени  $t_i$ , то во всех этих точках будет наблюдаться одна и та же фаза колебания.

Поверхность, образуемую этими точками, можно назвать волновой поверхностью. Она может быть охарактеризована тем, что все ее точки в каждый момент времени находятся в одной и той же фазе колебания.

Учитывая, что можно получить ряд моментов времени, для которых колебательный процесс будет иметь одну и ту же фазу колебания, нетрудно прийти к выводу, что вокруг источника света можно построить множество волновых поверхностей, соответствующих моментам времени, отличающимся друг от друга на число периодов  $T$ .

Можно принять, что эти волновые поверхности располагаются в пространстве неподвижно; сама же световая волна, распространяясь в пространстве, будет последовательно совпадать с 1-й, 2-й, 3-й и другими волновыми поверхностями.

Если свет распространяется в однородной среде, то скорость распространения света постоянна:

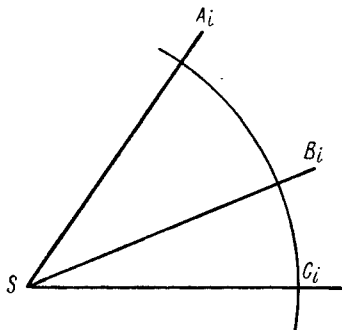
$$c = \text{const} \quad (360)$$

и за промежутки времени  $t_1, t_2$  и т. д. свет должен распространяться на одинаковые расстояния по всем направлениям.

В этом случае волновые поверхности должны принять форму концентрических сфер.

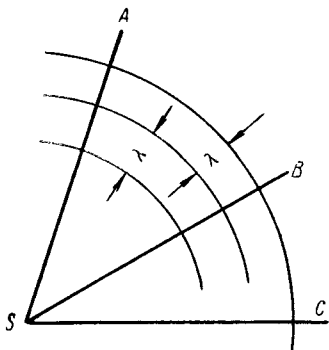
Общий центр всех волновых поверхностей будет совпадать с источником света. Лучи (направления), по которым распространяются световые колебания, окажутся прямыми линиями, исходящими из источника света. При этом будет иметь место строгая гомоцентричность хода лучей, и этот случай можно рассматривать как идеальный (фиг. 56).

Предположим, что на пути распространения волны расположена какая-либо поверхность, разграничивающая две среды с различными



Фиг. 55. Распространение световых возмущений от точечного источника света.

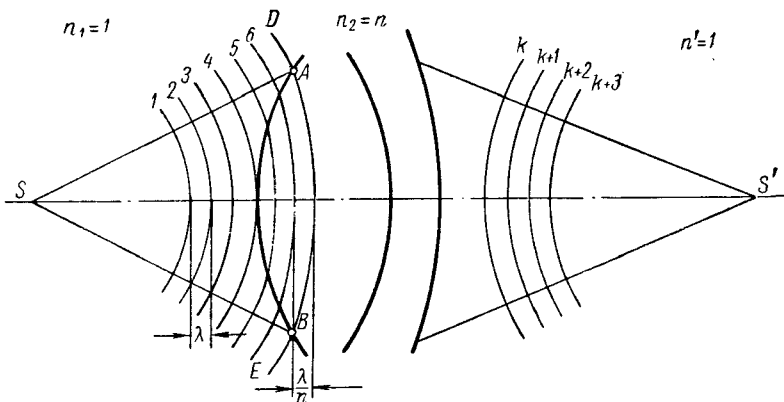
показателями преломления. Как известно, при переходе к другому показателю преломления изменится и скорость распространения световых колебаний, следствием чего явится изменение формы преломленной световой волны. Это изменение формы волны связано с формой преломляющей поверхности и положением светящейся точки.



Фиг. 56. Образование волновых поверхностей.

Можно представить себе частный случай, когда световая волна, прошедшая через несколько преломляющих поверхностей, вновь приобретает сферическую форму с центром в некоторой точке  $S'$ . При этом по выходе из системы получим гомоцентрический пучок лучей; точку  $S'$  можно рассматривать, как идеальное и физически совершенное изображение точки  $S$ .

Проследим процесс образования изображения точки  $S'$ , руководствуясь положениями волновой теории света. Обратимся к фиг. 57. Здесь  $S$  — источник света;  $1, 2, \dots, k, k+1$  — волновые поверхности;  $AB$  — первая преломляющая поверхность некоторой оптической си-



Фиг. 57. Прохождение волновых поверхностей через оптическую систему.

стемы;  $DE$  — волновая поверхность, образующаяся после преломления световой волны на первой поверхности системы. Расстояние  $\lambda$  между двумя соседними волновыми поверхностями равно:

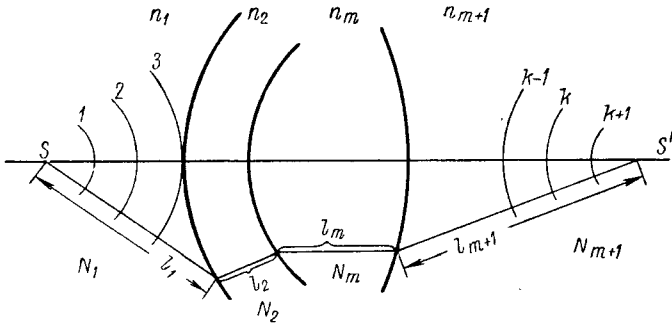
$$\lambda = l_{k+1} - l_k = (t_{k+1} - t_k)c = [(k+1)T - kT] = cT, \quad (361)$$

откуда следует, что расстояние между двумя соседними волновыми поверхностями оказывается равным длине световой волны.

Положим для простоты рассуждений, что источник света расположен в воздухе или в пустоте и что вследствие этого  $n_1 = 1$ ; принимая показатель преломления второй среды равным  $n_2 = n$ , допустим, что

в некоторый момент времени  $t_m$  световая волна, дойдя до рассматриваемой оптической системы, коснется вершины ее первой преломляющей поверхности.

Тогда в момент времени  $t_{m+1} = t_m + T$  она окажется уже внутри оптической системы на расстоянии  $\frac{\lambda}{n}$ . В тот же момент времени в точках  $A$  и  $B$  волна только пересечет преломляющую поверхность; на других же участках, например, на участках  $D$  и  $E$ , волна часть пути должна будет пройти в воздухе, а часть пути (после преломления) — в среде с показателем преломления  $n$ . Волновая поверхность претерпит в точках  $A$  и  $B$  излом. Однако, несмотря на это, на волновой поверхности



Фиг. 58. Определение оптической длины хода.

не будет образовываться каких-либо разрывов; таким образом, можно прийти к выводу, что при преломлении световой волны на любом числе поверхностей между любой парой волновых поверхностей находится вдоль любого направления одно и то же число волновых поверхностей.

Иными словами, вдоль любого направления между любыми двумя волновыми поверхностями сохраняется одно и то же число волн.

Как указано выше, для случая идеального изображения выходящая из системы волна должна иметь форму сферы с центром в точке изображения; поэтому расстояние от какой-либо из выходящих волновых поверхностей до изображения по любому направлению одинаково и на любом из лучей можно уложить одно и то же число волн между выходящей волновой поверхностью и точкой изображения.

Следовательно, число волн между источником света и его изображением по любому направлению должно сохраняться постоянным. Это положение известно под названием принципа Ферма.

Выразим этот принцип аналитически. Обозначив число волновых поверхностей, укладываемых между отдельными поверхностями системы на отдельных участках рассматриваемого луча  $N_1, N_2, \dots, N_{m+1}$ , длины отрезков луча между поверхностями системы  $l_1, l_2, \dots, l_{m+1}$  (фиг. 58), можно написать:

$$N_1 = \frac{l_1}{\lambda_1} = \frac{l_1 n_1}{\lambda_0}; \quad N_2 = \frac{l_2}{\lambda_2} = \frac{l_2 n_2}{\lambda_0}; \quad \dots; \quad N_m = \frac{l_m n_m}{\lambda_0}, \quad (362)$$

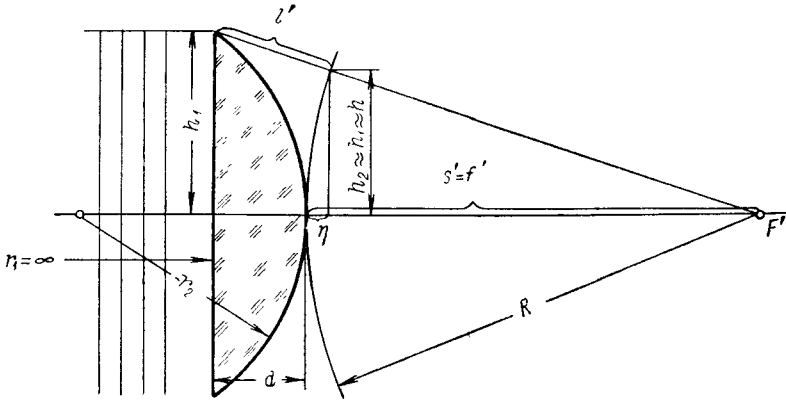
где  $\lambda_0$  — длина волны света в пустоте.

Если число волн постоянно вдоль любого из лучей, то можно написать

$$\sum N_k = N = \text{const} = \sum_{k=1}^{k=m+1} \frac{l_k n_k}{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda_0} \sum n l, \quad (363)$$

т. е. суммарная оптическая длина хода вдоль любого луча — величина постоянная.

В качестве примера приложения волновой теории света рассмотрим работу плоско-выпуклой линзы в воздухе (фиг. 59).



Фиг. 59. Преломление световой волны на плоско-выпуклой линзе.

На фиг. 59 показана плоско-выпуклая линза, обращенная к предмету, лежащему в бесконечности, плоской стороной. Толщину линзы примем равной  $d$ , радиус второй поверхности линзы равным  $-r_2$ . Предположим далее, что выходящая из линзы волновая поверхность (касательная к ее вершине) имеет радиус кривизны, равный  $R$ . Входящая волновая поверхность в этом случае является плоской, так как предмет по условию лежит в бесконечности. Определим оптическую длину хода вдоль оси линзы.

Согласно принципу Ферма можно написать:

$$n l = n d. \quad (364)$$

Найдем длину хода от острого края линзы до волновой поверхности радиуса  $R$  вдоль направления, соединяющего острый край линзы с центром  $F'$  выходящей волновой поверхности.

Для этого направления длина хода равна

$$l' = d + \eta \quad (365)$$

где  $\eta$  — стрелка, образуемая волновой поверхностью на диаметре линзы.

Величина стрелки может быть найдена по известной приближенной формуле

$$\eta = \frac{h^2}{2R}. \quad (366)$$

Но толщина линзы  $d$  также может быть выражена через радиус кривизны второй поверхности линзы:

$$d = -\frac{h^2}{2r_2}. \quad (367)$$

Приравнивая друг другу выражения (364) и (365) на основании принципа Ферма и пользуясь значениями  $d$  и  $\eta$ , по формулам (366) и (367) находим:

$$l' = nl = nd = -\frac{h^2}{2r_2} + \frac{h^2}{2R} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{h^2}{r_2}, \quad (368)$$

откуда определяется величина  $\frac{1}{R}$ :

$$\frac{1}{R} = -(n-1) \frac{1}{r_2} = \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'}. \quad (369)$$

Формула (369) показывает, что радиус выходящей волновой поверхности по величине равен последнему отрезку или фокусному расстоянию линзы, что можно было усмотреть ранее из фиг. 59. Это значение фокусного расстояния получено согласно принципу Ферма, т. е. на основе волновой теории света. Таким образом, приходим к выводу, что можно разбирать одни и те же явления различными способами и при этом получать одни и те же результаты. Выбор того или иного метода надо осуществлять, руководствуясь удобством или простотой метода.

В ряде случаев более удобным и более наглядным оказывается метод, построенный на базе волновой теории света; в частности, использование волновой теории света выгодно при изучении аберраций оптической системы. Поэтому воспользуемся этим методом при разборе аберраций.

### § 31. Волновые аберрации

Выше указывалось, что выходящая из системы световая волна не сохраняет строго сферической формы и всегда несколько отлична от сферы.

Это отличие от сферы выходящей волны или волновой поверхности после системы называют в о л н о в о й а б е р р а ц и е й рассматриваемого пучка лучей. Деформация волны или волновой поверхности всегда связана с изменением направления нормалей к ним, т. е. с нарушением гомоцентричности выходящего из системы пучка лучей, с возникновением аберраций в рассматриваемом пучке лучей.

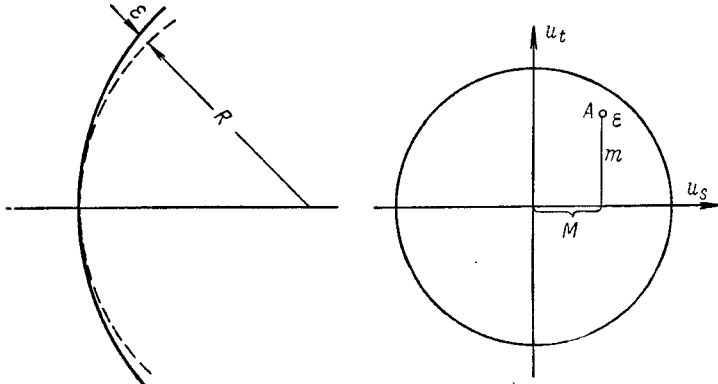
И волновая аберрация, и лучевые аберрации представляют различные формы одних и тех же физических явлений.

Рассмотрим работу зонной дифракционной решетки — развитый случай образования изображения одним отверстием. Можно было бы думать, что такая решетка должна быть свободной от аберраций; в действительности же изображение, создаваемое такой решеткой, не свободно от аберраций; так, в наклонных к оси решетки световых пучках

наблюдается астигматизм, соответствующий по величине астигматизму тонкой линзы в воздухе.

Величина астигматизма решетки очень легко определяется на основе волновой теории света. Ясно, что определение астигматизма решетки на базе лучевых аберраций оказалось бы невозможным.

Предположим, что волновая поверхность имеет некоторую волновую аберрацию, благодаря чему она будет отстоять от сферы сравнения на некоторую величину  $\varepsilon$ , изменяющуюся в различных участках рассматриваемой волновой поверхности.



Фиг. 60. Волновая аберрация.

На фиг. 60 показаны сечение волновой поверхности и сферы сравнения плоскостью, проходящей через центр сферы сравнения, а также вид на рассматриваемую волновую поверхность из центра сферы сравнения. Любая из точек волновой поверхности может быть спроектирована на сферу сравнения. Проекцию такой произвольной точки  $A$  можно определить двумя угловыми координатами  $u_t$  и  $u_s$ , представляющими апертурные углы некоторого луча, идущего в рассматриваемом пучке. Точка  $A$  могла бы быть так же определена линейными координатами  $m$  и  $M$  проекции точки, в которой рассматривается волновая аберрация, на плоскость соответственного зрачка.

Воспользуемся для рассмотрения волновой аберрации угловыми координатами; тогда выражение для волновой аберрации может быть представлено в виде функции

$$\varepsilon = \varepsilon(u_t, u_s); \quad (370)$$

величины  $\varepsilon$  всегда малы и не имеют никогда разрывов непрерывности;  $\varepsilon$  — есть непрерывная и дифференцируемая функция, поэтому ее можно представить в виде ряда, разложенного по степеням обоих апертурных углов.

Можно отбросить первый, постоянный член разложения, так как предполагалось, что волновая поверхность соприкасается в ее вершине со сферой сравнения. В равной степени могут быть отброшены члены разложения, содержащие апертурные углы в первой степени, так как



наличие этих членов означало бы, что рассматриваемая волновая поверхность и сфера сравнения не соприкасаются, а пересекают друг друга.

Разложение волновой aberrации по апертурным углам может быть начато сразу с членов, содержащих апертурные углы во второй степени. В таком виде общее разложение волновой aberrации может быть представлено формулой

$$\varepsilon = A'_i u_i^2 + B' u_i u_s + A'_s u_s^2 + A''_i u_i^3 + B'' u_i^2 u_s + C'' u_i u_s^2 + D'' u_s^3 + A'''_i u_i^4 + B''' u_i^3 u_s + C''' u_i^2 u_s^2 + D''' u_i u_s^3 + A''''_s u_s^4 + \dots \quad (371)$$

Коэффициенты, приведенные в формуле (371), будут зависеть от координат рассматриваемой точки поля зрения.

На практике часто имеем дело с системами, центрированными относительно оси; в таких системах наклонные пучки всегда имеют плоскость симметрии. Очевидно, что в этом случае в наклонном пучке не смогут существовать члены, содержащие нечетные степени сагиттальных апертурных углов  $u_s$ . Полагая апертурные углы малыми, можно отбросить члены разложения волновой aberrации, в которых апертурные углы входят в высоких степенях; например, члены, содержащие апертурные углы в пятой степени и выше.

Таким образом, формула (371) может быть дана в виде:

$$\varepsilon = A'_i u_i^2 + A'_s u_s^2 + A''_i u_i^3 + C'' u_i u_s^2 + A'''_i u_i^4 + C''' u_i^2 u_s^2 + A''''_s u_s^4. \quad (372)$$

Формула (372) охватывает три основные aberrации наклонного пучка лучей:

1) астигматизм, определяемый членами, содержащими вторые степени апертурных углов:

$$\varepsilon_I = A'_i u_i^2 + A'_s u_s^2. \quad (373)$$

2) кому, определяемую членами, содержащими третьи степени апертурных углов:

$$\varepsilon_{II} = A''_i u_i^3 + C'' u_i u_s^2. \quad (374)$$

3) сферическую aberrацию третьего порядка в наклонном пучке, определяемую членами, содержащими четвертые степени апертурных углов:

$$\varepsilon_{III} = A'''_i u_i^4 + C''' u_i^2 u_s^2 + A''''_s u_s^4. \quad (375)$$

Можно было бы продолжить разложение волновой aberrации и ввести члены разложения, характеризующие, например, кому и сферическую aberrацию пятого порядка, определяемые соответственно пятыми и шестыми степенями апертурных углов и т. д.

Приведенные aberrации не охватывают такие две aberrации третьего порядка, как дисторсию и кривизну поверхности изображения; однако эти aberrации определяют собой лишь положение точки изображения в пространстве и не влияют на структуру изображения точки.

При рассмотрении изображения точки, лежащей на оси системы, должна была бы наблюдаться круговая симметрия вокруг оси;

следствием такой симметрии явилась бы невозможность существования несимметричных (кома) и не обладающих круговой симметрией вокруг оси (астигматизм и некоторые члены сферической aberrации) aberrаций; это позволяет сделать вывод о возможности существования на оси системы лишь центрированной сферической aberrации различных порядков.

**§ 32. Зависимость между волновыми и геометрическими aberrациями**

Волновые и геометрические aberrации представляют различные формы одних и тех же явлений.

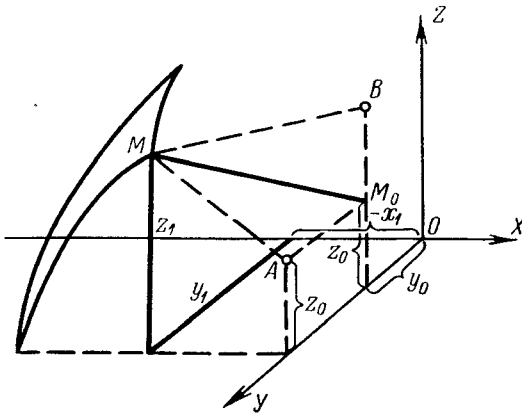
Поэтому при рассмотрении aberrаций нередко может встретиться необходимость перехода от одной формы представления aberrаций к другой; ввиду этого необходимы формулы, обеспечивающие возможность выполнения такого перехода.

Переход от волновых aberrаций к лучевым сравнительно несложен; он сводится к дифференцированию формул волновой aberrации.

Волновые aberrации и геометрические aberrации не являются единственно возможными формами представления aberrаций. В некоторых случаях целесообразно прибегать к другим формам представления aberrаций, например в виде коэффициентов aberrаций, каустических поверхностей.

Как волновые, так и геометрические aberrации изменяются с изменением величины апертурных углов при сохранении самой оптической системы неизменной. Поэтому для получения независимых от величин апертурных углов выражений aberrаций системы выгодно вводить постоянные коэффициенты aberrаций, которые могут охарактеризовать свойства получаемого изображения.

Перейдем к выводу зависимости между волновыми и геометрическими aberrациями. На фиг. 61 показан участок волновой поверхности, ограниченной координатными плоскостями  $XOZ$  и  $ХОУ$  и плоскостями, параллельными названным и проходящими через некоторую точку  $M$ , для которой рассматривается волновая aberrация. Предполагается, что начало координат совпадает с центром сферы сравнения и что нормаль, восстановленная к волновой поверхности в точке  $M$ , пересекает плоскость  $ZOY$  в некоторой точке  $M_0$ .



Фиг. 61. Зависимость между формой волновой поверхности и поперечными aberrациями.

Обозначим координаты точки  $M$  через  $x_1, y_1, z_1$ ; координаты точки  $M_0$  — через  $x_0, y_0$  и  $z_0$ .

Напишем уравнение волновой поверхности в следующем виде:

$$x = f(z, y). \quad (376)$$

Рассмотрим плоскость, параллельную плоскости  $XOZ$  (плоскости фиг. 61) и проходящую через рассматриваемую точку  $M$ .

Приравняем текущую координату  $y = y_1$ ; тогда уравнение волновой поверхности (376) перейдет в уравнение, определяющее сечение волновой поверхности плоскостью, параллельной плоскости  $XOZ$ :

$$x = f(z, y = y_1 = \text{const}). \quad (377)$$

Аналогично, пересекая волновую поверхность плоскостью, параллельной плоскости  $XOY$ , получим след этого пересечения; приравняв текущую координату  $z = z_1$  в уравнении волновой поверхности (376), получаем:

$$x = f(z = z_1 = \text{const}, y). \quad (378)$$

Через точку  $M$  проведем плоскость, перпендикулярную плоскости  $XOZ$  и проходящую через нормаль  $MM_0$ . След ее пересечения с плоскостью, проходящей через точку  $M$  параллельно плоскости  $XOZ$ , показан на фиг. 61 пунктиром  $MA$ . Этот след пересечет плоскость  $ZOY$  в точке  $A$  с координатами  $y_1, z_0$ .

Аналогичным образом можно найти проекцию нормали на плоскость, проходящую через точку  $M$  параллельно плоскости  $XOY$ . Эта проекция пересечет плоскость  $ZOY$  в точке  $B$  с координатами  $y_0, z_1$ .

Имея уравнения следов пересечения волновой поверхности с плоскостями, проходящими через точку  $M$  параллельно координатным плоскостям, можно написать уравнения касательных к этим следам. Имеем:

$$X - x_1 = (Z - z_1) \frac{\partial f(z, y)}{\partial z}; \quad (379)$$

$$X - x_1 = (Y - y_1) \frac{\partial f(z, y)}{\partial y}. \quad (380)$$

От уравнений касательных нетрудно перейти к уравнениям нормалей:

$$X - x_1 = -\frac{Z - z_1}{\frac{\partial f}{\partial z}}; \quad X - x_1 = -\frac{Y - y_1}{\frac{\partial f}{\partial y}}. \quad (381)$$

Здесь и в дальнейшем, для сокращения принято  $df = df(z, y)$ .

Система двух уравнений (381) определяет уравнение нормали к волновой поверхности в точке  $M$ .

Если бы наша волновая поверхность была сферой, то все ее нормали должны были бы пересекаться в начале координат  $O$ . В общем случае, каждая из нормалей пересечет плоскость  $ZOY$  в некоторой определенной точке  $M_0(z_0, y_0)$ ; иными словами, лучи пучка, обладающего какими-либо абберациями, отойдут от начала координат и для каждого

луча получатся поперечные aberrации, которые и выразятся координатами его точки  $M_0$ :

$$\sigma_t = z_0; \quad \sigma_s = y_0. \quad (382)$$

Для того, чтобы определить координаты  $z_0$  и  $y_0$ , необходимо в уравнении (381) принять текущую координату  $X$  равной нулю.

Получаем:

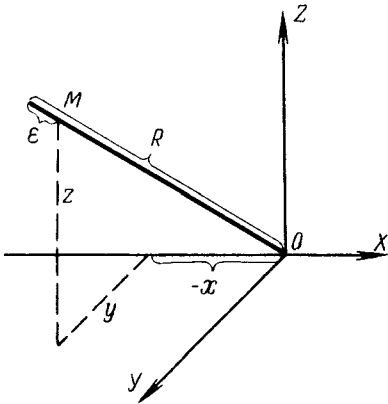
$$-x_1 = -\frac{z_0 - z_1}{\frac{\partial f}{\partial z}}; \quad -x_1 = -\frac{y_0 - y_1}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \quad (383)$$

откуда находим координаты  $z_0$  и  $y_0$ :

$$z_0 = \sigma_t = \frac{\partial f}{\partial z} x_1 + z_1 \quad (384)$$

$$y_0 = \sigma_s = \frac{\partial f}{\partial y} x_1 + y_1. \quad (385)$$

Формулы (384) и (385) дают искомые зависимости между лучевыми aberrациями и волновой поверхностью, выраженными в системе прямоугольных координат; однако эти формулы показывают зависимость геометрических aberrаций от формы волновой поверхности; нас же интересует зависимость между геометрическими aberrациями и волновыми aberrациями — отступлениями волновой поверхности от идеальной сферы.



Фиг. 62. Установление связи координат с волновой aberrацией.

Займемся переходом от волновой поверхности к волновым aberrациям. На фиг. 62  $R$  — радиус сферы сравнения;  $M$  — рассматриваемая точка волновой поверхности;  $\varepsilon$  — волновая aberrация для данной точки волновой поверхности. Так как

величина  $\varepsilon$  очень мала по сравнению с  $R$ , то можно отложить величину  $\varepsilon$  на отрезке, соединяющем точку  $M$  с началом координат.

Из фиг. 62 следует:

$$(R - \varepsilon)^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (386)$$

Подставляя величину  $x$  из формулы (376) в формулу (386), находим:

$$(R - \varepsilon)^2 = [f(z, y)]^2 + y^2 + z^2. \quad (387)$$

Возьмем частную производную от обеих частей уравнения (387) по переменной  $z$ . Получим:

$$-2(R - \varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 2 \frac{\partial f}{\partial z} f(z, y) + 2z = 2 \frac{\partial f}{\partial z} x + 2z. \quad (388)$$

Дифференцируя формулу (387) по  $y$ , находим:

$$-2(R - \epsilon) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = 2 \frac{\partial f}{\partial y} f(z, y) + 2y = 2 \frac{\partial f}{\partial y} x + 2y. \quad (389)$$

Возвращаясь к формулам (384) и (385), можно показать, что в правых частях формул (388) и (389) имеем не что иное, как удвоенные величины поперечных aberrаций  $\sigma_t$  и  $\sigma_s$ .

На основании этого формулы (388) и (389) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\sigma_t = -(R - \epsilon) \frac{\partial \epsilon}{\partial z}; \quad \sigma_s = -(R - \epsilon) \frac{\partial \epsilon}{\partial y}. \quad (390)$$

Но так как величина  $\epsilon$  очень мала по сравнению с  $R$ , то ею без ущерба можно пренебречь. Тогда формулы (390) соответственно упрощаются:

$$\sigma_t = -R \frac{\partial \epsilon}{\partial z}; \quad \sigma_s = -R \frac{\partial \epsilon}{\partial y}. \quad (391)$$

Эти точные формулы связывают поперечные aberrации уже не с волновой поверхностью, а с волновой aberrацией.

Для удобства перейдем от прямоугольных координат, определяющих положение рассматриваемой точки на волновой поверхности, к угловым координатам по апертурным углам и предположим, что апертурные углы малы. Из фиг. 63 можно установить приближенную зависимость между прямоугольными координатами  $z$  и  $y$  и апертурными углами  $u_t$  и  $u_s$ . Находим:

$$z = Ru_t; \quad y = Ru_s. \quad (392)$$

Дифференцируя эти выражения, получаем:

$$dz = R du_t; \quad dy = R du_s. \quad (393)$$

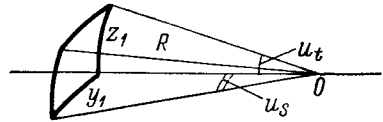
Подставляя значения  $dz$  и  $dy$  в формулы (391), окончательно получаем:

$$\sigma_t = -\frac{\partial \epsilon}{\partial u_t}; \quad \sigma_s = -\frac{\partial \epsilon}{\partial u_s}. \quad (394)$$

Формулы (394) связывают лучевые и волновые aberrации, но являются приближенными.

Нередко могут встретиться случаи, когда выходящая из системы волновая поверхность близка по форме к плоскости; это характерно для оптических систем, работающих совместно с глазом, — телескопических систем и микроскопов.

В подобных случаях величины поперечных aberrаций не могут быть использованы для оценки качества изображения системы, поэтому вместо поперечных aberrаций прибегают к представлению aberrаций в угловой форме, характеризуя качество изображения отступлением от параллельности рассматриваемого пучка.



Фиг. 63. Характер определения меридиональных и сагиттальных апертурных углов.

В таких случаях исходная формула (376), представлявшая форму волновой поверхности, будет выражать теперь непосредственно волновую абберацию. В силу этого формула (376) может быть представлена в виде:

$$\varepsilon = x = f(z, y). \quad (376a)$$

Величины угловых аббераций можно представить, как величины углов  $\gamma_z$  и  $\gamma_y$  с координатными плоскостями  $XOY$  и  $XOZ$ , образуемых нормалью волновой поверхности в рассматриваемой точке.

Из уравнений нормалей (381) видно, что величины угловых коэффициентов представлены в виде частных производных от исходной функции  $f(z, y)$ , выражаемой формулой (376a). Поэтому величины малых углов  $\gamma_z$  и  $\gamma_y$ , составляемых нормалью к волновой поверхности с координатными плоскостями, в случае, когда можно пренебречь разностью между тангенсом и углом, могут быть определены из формул:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_z = \operatorname{tg} \gamma_z &= -\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \\ \gamma_y = \operatorname{tg} \gamma_y &= -\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (381a)$$

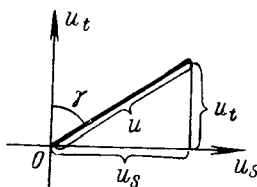
## Глава X

### РАЗБОР АБЕРРАЦИЙ НАКЛОННОГО ПУЧКА

#### § 33. Астигматизм

При рассмотрении аббераций наклонного пучка лучей исходим из определения тех или иных аббераций, которые были даны в формулах (373), (374) и (375) при разложении волновой абберации на отдельные составляющие.

Исходя из представления аббераций в волновой форме, будем во всех рассматриваемых случаях выполнять переход к поперечным абберациям.



Фиг. 64. Зависимость между апертурными углами в сагиттальной и меридиональной плоскостях с апертурным углом в произвольной плоскости.

Предположим зрачок системы круглым (виньетирование в пучке отсутствует); в соответствии с этим введем, наряду с разложением аббераций по составляющим апертурного угла в прямоугольных координатах  $u_t$  и  $u_s$ , представление аббераций в полярных координатах: по апертурному углу  $u$  и углу обхода по контуру  $\gamma$ . Эти величины показаны на фиг. 64.

Обращаясь к общему выражению для астигматизма, данного в формуле (373), получим:

$$\varepsilon = A'_i u_t^2 + A'_s u_s^2. \quad (395)$$

Беря частные производные от волновой aberrации  $\epsilon$  по апертурным углам  $u_t$  и  $u_s$ , находим величины поперечных aberrаций  $\sigma_t$  и  $\sigma_s$ :

$$-\sigma_t = 2A'_t u_t; \quad -\sigma_s = 2A'_s u_s. \quad (396)$$

Рассмотрим меридиональную плоскость системы. Пользуясь фиг. 65, можно выразить величину меридиональной кривизны  $x_t$ , полагая малыми величины полевых и апертурных углов. Из фиг. 65 получаем:

$$x_t = \frac{\sigma_t}{u_t} = -2A'_t. \quad (397)$$

Аналогично, обращаясь к сагиттальной плоскости, можно величину сагиттальной кривизны представить в виде:

$$x_s = \frac{\sigma_s}{u_s} = -2A'_s. \quad (398)$$

Таким образом, поперечные aberrации могут быть связаны с меридиональной и сагиттальной кривизной зависимостями

$$-\sigma_t = -x_t u_t; \quad -\sigma_s = -x_s u_s, \quad (399)$$

а через сагиттальную и меридиональную кривизну можно выразить и величину волновой aberrации:

$$-\epsilon = \frac{x_t}{2} u_t^2 + \frac{x_s}{2} u_s^2. \quad (400)$$

Ознакомимся с порядком величин. Полагая апертурный угол  $u_t = 0,1$ ,  $x_t = 1$  мм и полагая  $x_s = 0$ , получаем:

$$-\epsilon = 0,5 \cdot 0,01 = 0,005 \text{ мм} = 5 \text{ мк} \approx 10\lambda.$$

Это значительная волновая aberrация. Однако величина поперечной aberrации кажется на первый взгляд не очень значительной; действительно, для поперечной aberrации в этом же случае находим:

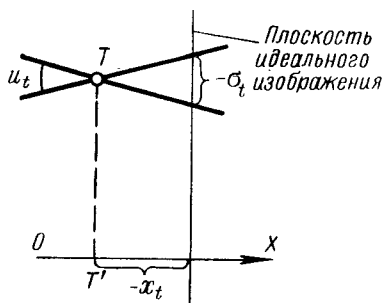
$$-\sigma_t = -x_t u_t = 0,1 \text{ мм}.$$

При уменьшении апертурного угла вдвое до величины  $u_t = 0,05$  волновая aberrация должна будет уменьшиться вчетверо, но и при этом она остается значительной ( $\epsilon \approx 2,5\lambda$ ).

Полагая же апертурный угол равным 0,01, получаем волновую aberrацию порядка 0,1  $\lambda$ , что соответствует физически совершенному изображению.

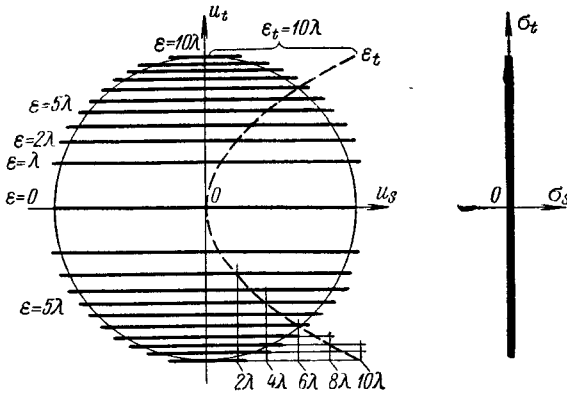
Рассмотрим картину изменения волновых aberrаций на различных участках зрачка системы.

Примем коэффициент  $A'_t \neq 0$ ,  $A'_s = 0$ . В этом случае, идя вдоль оси  $u_s$ , где  $u_t = 0$ , получим для волновой aberrации  $\epsilon$  значение, также равное нулю; следовательно, волновая aberrация вдоль оси  $u_s$



Фиг. 65. Связь расфокусировки с поперечными aberrациями.

будет отсутствовать. Полагая же, что  $u_t$  не равно нулю, получим для волновой aberrации постоянную величину, не зависящую от  $u_s$ . Тогда для постоянных значений волновой aberrации получим семейство прямых, параллельных оси  $u_s$ .



Фиг. 66. Волновые и поперечные aberrации для случая астигматизма при совмещении плоскости наводки с одним из фокусов.

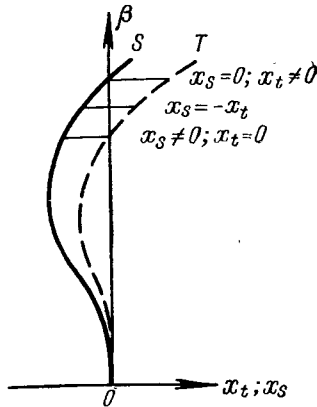
Рассматривая же изменение волновой aberrации вдоль оси  $u_t$ , увидим, что в этом случае волновая aberrация изменяется по квадратичному закону. Называя сечение волновой поверхности координатными плоскостями волновым фронтом, соответственно сагиттальным или меридиональным, можно сказать, что волновая aberrация по меридиональному волновому фронту представляется параболой 2-й степени, а по сагиттальному волновому фронту тождественно равна нулю (представлена прямой, совпадающей с осью  $u_s$ ).

Волновая поверхность в этом случае примет форму параболического цилиндра.

Обращаясь к поперечным aberrациям, видим, что сагиттальная составляющая оказывается равной нулю; поэтому при обходе зрачка по круговому контуру точка на изображении будет перемещаться вдоль оси  $u_t$ .

Картина волновых и поперечных aberrаций показана на фиг. 66.

Рассматривая зависимость изменения величин  $x_t$  и  $x_s$  от величины угла поля зрения (фиг. 67), нетрудно представить случай, когда кривые сагиттальной и меридиональной кривизны, переходя из области отрицательных значений в область положительных значений, будут



Фиг. 67. Астигматизм для плоскости наводки, помещенной на половине расстояния между фокусами (волновая aberrация).  $x_s = -x_t$ .

зрения (фиг. 67), нетрудно представить случай, когда кривые сагиттальной и меридиональной кривизны, переходя из области отрицательных значений в область положительных значений, будут



пересекать ось ординат не одновременно; здесь, очевидно, встретимся, кроме пары значений  $x_t \neq 0$  и  $x_s = 0$ , со значениями  $x_t = -x_s$  и значениями  $x_t = 0$  и  $x_s \neq 0$ . Эта последняя точка аналогична только что рассмотренной точке, но величины  $x_t$  и  $x_s$  меняются своими местами. Если же  $x_t = -x_s$ , то, обращаясь к формулам (397), (398) и (400), можно написать:

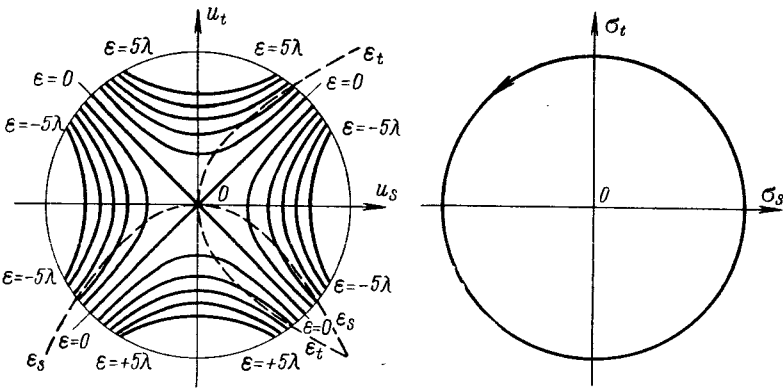
$$x_t = -x_s; \quad A'_t = -A'_s; \quad (401)$$

$$-\varepsilon = \frac{x_t}{2} (u_t^2 - u_s^2) = \frac{x_t}{2} (u_t - u_s)(u_t + u_s). \quad (402)$$

Это уравнение при  $\varepsilon = 0$  имеет два корня:

$$u_t = u_s; \quad u_t = -u_s. \quad (403)$$

Оба эти корня выражают две взаимно-перпендикулярные прямые, наклоненные к координатным осям под углом в  $45^\circ$ . Приравнявая



Фиг. 68. Астигматизм для плоскости наводки между фокусами (волновые и поперечные aberrации).

величину волновой aberrации  $\varepsilon$  некоторому постоянному значению  $\varepsilon_1 = \text{const}$ , видим, что уравнение (402) выражает равнобочную гиперболу.

Следовательно, все множество кривых равных волновых aberrаций представится в виде семейства равнобочных гипербол, имеющих своими асимптотами прямые «нулевых» волновых aberrаций ( $\varepsilon = 0$ ).

Нетрудно показать, что по меридиональному и сагитальному волновым фронтам волновые aberrации будут разных знаков, причем по величине они равны друг другу. Отсюда следует, что волновые aberrации во всех четырех секторах, разделяемых прямыми нулевых волновых aberrаций, будут чередоваться по своим знакам.

Картина волновых aberrаций показана на фиг. 68 слева.

Перейдем к рассмотрению составляющих поперечных aberrаций. На основании формул (399) можно написать:

$$\sigma_t = x_t u_t; \quad \sigma_s = -x_t u_s. \quad (404)$$

Помня, что апертурные углы  $u_t$  и  $u_s$  можно рассматривать, как проекции угла  $u$  на обе координатные оси, можно написать:

$$u_t = u \cos \gamma; \quad u_s = u \sin \gamma. \quad (405)$$

Подставляя в формулу (404) значения  $u_t$  и  $u_s$  из формул (405), получаем:

$$\sigma_t = x_t u \cos \gamma; \quad \sigma_s = -x_t u \sin \gamma. \quad (406)$$

Сопоставляя формулу (406) с формулой (405), можно показать, что при обходе контура зрачка по часовой стрелке контур, описываемый лучом на плоскости изображения, также будет окружностью, но обход этого контура происходит в противоположном направлении, т. е. против часовой стрелки, как показано на фиг. 68 справа.

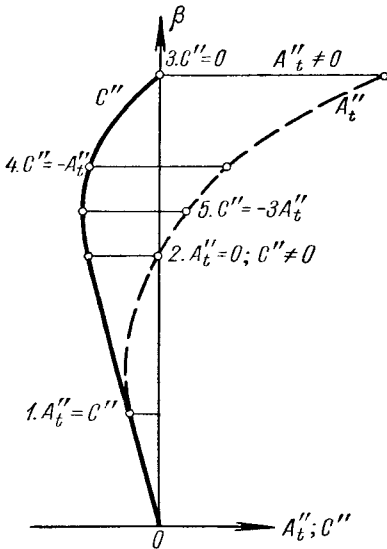
### § 34. Кома

Пользуясь формулой (374), перепишем общее выражение для комы, представленной в волновой форме, в виде:

$$\varepsilon = A_t'' u_t^3 + C'' u_t u_s^2. \quad (407)$$

Составляющие поперечной аберрации комы легко находятся как частные производные от волновой комы по соответственным апертурным углам:

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_t &= 3A_t'' u_t^2 + C'' u_s^2 \\ -\sigma_s &= 2C'' u_t u_s \end{aligned} \right\} \quad (408)$$



Фиг. 69. Картина изменения коэффициентов комы по полю зрения.

Из формулы (407) нетрудно установить, что во всех случаях при  $u_t = 0$  волновая аберрация также окажется равной нулю; таким образом, волновая кома вдоль сагиттального фронта будет отсутствовать.

Из формулы (408) также следует, что при  $u_t = 0$ , т. е. в меридиональной плоскости, поперечная аберрация  $\sigma_s$  равна нулю. Таким образом, все лучи, лежащие в главном сагиттальном сечении, пересекают плоскость изображения в меридиональной плоскости. Построим график изменения коэффициентов  $A_t''$  и  $C''$  по углу поля зрения  $\beta$ , предполагая, что оба коэффициента перейдут из области отрицательных значений в область положительных значений не одновременно (фиг. 69).

Вблизи оси системы оба коэффициента  $A_t''$  и  $C''$  равны друг другу (равенство этих коэффициентов устанавливается в теории абер-

раций третьего порядка); далее должно наблюдаться расхождение обеих кривых; затем одна из кривых, например кривая коэффициента  $A_t''$ , пересечет ось ординат; в этот момент коэффициент  $A_t'' = 0$ . После этой точки оба коэффициента имеют разные знаки; в этом участке можно встретить значения коэффициентов, равные по абсолютной величине, но имеющие разные знаки. Вслед за этим наблюдается момент пересечения второй из кривых с осью ординат, когда второй из коэффициентов должен обратиться в нуль. После этого оба коэффициента снова будут иметь одинаковые знаки.

*1-й случай.* Коэффициент  $A_t'' = C''$ . Этот случай, характерный для небольших полей зрения, представляет практический интерес. Составим общее выражение для волновой aberrации:

$$\epsilon = A_t'' (u_t^2 + u_s^2) u_t \quad (409)$$

и для составляющих поперечных aberrаций

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_t &= A_t'' (3u_t^2 + u_s^2) \\ -\sigma_s &= 2A_t'' u_t u_s \end{aligned} \right\} \quad (410)$$

Рассмотрим картину меридионального волнового фронта (фиг. 70). Полагая  $u_s = 0$ , можно показать, что уравнение волновой aberrации в этом случае переходит в уравнение кубической параболы (3-й степени):

$$\epsilon = A_t'' u_t^3 \quad (411)$$

Сагиттальный же волновой фронт даст значение волновой aberrации, равное нулю. Зададимся постоянными значениями волновой aberrации, отличными от нуля:

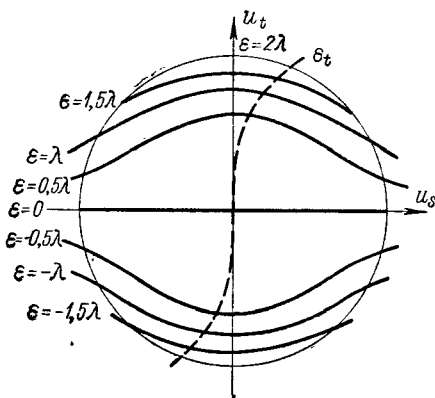
$$\epsilon = \text{const} = A_t'' (u_t^2 + u_s^2) u_t \neq 0. \quad (412)$$

Рассматривая выражение (412), можно установить, что изменение знака у волновой aberrации может происходить лишь за счет изменения знака у апертурного угла  $u_t$ ; приходим к выводу, что волновая aberrация меняет знак, переходя через сагиттальный волновой фронт.

Вычисление кривых равных волновых aberrаций в этом случае удобно производить, решив уравнение для заданной волновой aberrации относительного апертурного угла  $u_s$ :

$$u_s = \pm \sqrt{\frac{\epsilon}{A_t'' u_t} - u_t^2}. \quad (413)$$

Из формулы (413) нетрудно установить, что кривые постоянных волновых aberrаций, отличающиеся только по знаку, располагаются



Фиг. 70. Простая кома (третьего порядка). Волновая aberrация.

симметрично относительно сагиттального волнового фронта. При увеличении апертурного угла  $u_s$  происходит уменьшение апертурного угла в меридиональной плоскости; кривые равных волновых aberrаций асимптотически приближаются к оси абсцисс. Максимальное значение  $u_t$  приобретает при  $u_s = 0$ , т. е. вдоль меридионального волнового фронта. Кривые равных волновых aberrаций больше расходятся друг с другом в центральной части зрачка, что весьма выгодно в тех случаях, когда зрачок по меридиональному сечению имеет меньший диаметр, чем в сагиттальном сечении (случай наличия обычного геометрического виньетирования).

Перейдем к рассмотрению поперечных aberrаций для анализируемого случая. Принимая, как и ранее (при рассмотрении астигматизма),

$$u = \text{const}; \quad u_t = u \cos \gamma; \quad u_s = u \sin \gamma, \quad (414)$$

можно выразить сумму квадратов обоих апертурных углов  $u_t$  и  $u_s$ :

$$u_t^2 + u_s^2 = u^2. \quad (415)$$

Подставляя значения этих величин в формулу (410), получаем для составляющих поперечной aberrации  $\sigma_t$  и  $\sigma_s$  следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_t &= A_t'' u^2 (3 \cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma) \\ -\sigma_s &= A_t'' u^2 \sin 2\gamma \end{aligned} \right\} \quad (416)$$

откуда после некоторых преобразований получаем окончательно:

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_t &= A_t'' u^2 (2 + \cos 2\gamma) \\ -\sigma_s &= A_t'' u^2 \sin 2\gamma \end{aligned} \right\} \quad (417)$$

Из формул (417) следует, что при обходе зрачка по окружности луч в плоскости изображения обегает окружность дважды, причем радиус этой двойной окружности оказывается равным

$$R = A_t'' u^2. \quad (418)$$

Наличие в меридиональной составляющей [формулы (417)] поперечной aberrации члена, не зависящего от угла обхода  $\gamma$ , указывает на то, что центр этой двойной окружности будет смещен относительно начала координат на величину

$$2A_t'' u^2 = 2R. \quad (419)$$

При изменении величины апертурного угла  $u$  произойдет как изменение радиуса двойной окружности, описываемой лучом на изображении, так и изменение расстояния ее центра от начала координат; при этом новая картина окажется подобной первоначальной. В силу этого можно провести общие касательные ко всем окружностям, описываемым лучами при любых постоянных апертурах в плоскости изображения; в данном случае угол между касательными, которые пройдут через начало координат, равен  $60^\circ$  (фиг. 71).

2-й случай. Коэффициент  $A_t'' = 0$ ; коэффициент  $C'' \neq 0$ . Общее выражение для волновой комы принимает следующий вид:

$$\varepsilon = C'' u_t u_s^2; \quad (420)$$

выражения же для составляющих поперечных aberrаций

$$-\sigma_t = C'' u_s^2; \quad -\sigma_s = 2C'' u_s u_t. \quad (421)$$

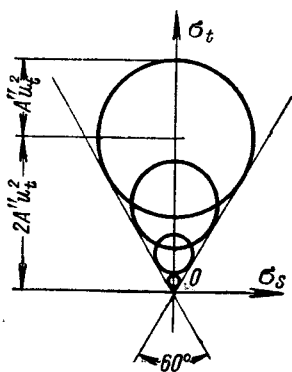
В этом случае волновые aberrации для обоих волновых фронтов равны нулю (фиг. 72); кривые же для равных волновых aberrаций представлены семейством уравнений:

$$\varepsilon = \text{const} = \varepsilon_1 = C'' u_t u_s^2 \neq 0. \quad (422)$$

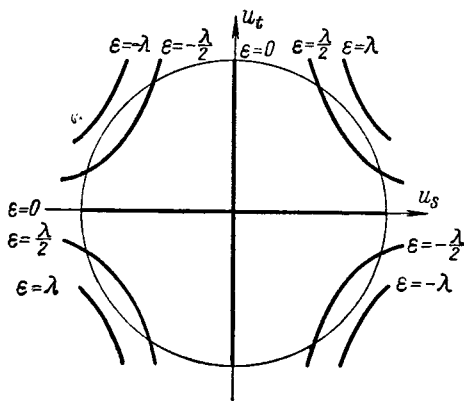
Решая уравнение (422) относительно апертурного угла  $u_s$ , находим:

$$u_s = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{C'' u_t}}. \quad (423)$$

Из формулы (423) видно, что при уменьшении меридионального апертурного угла  $u_t$  в  $k$  раз угол  $u_s$  увеличивается в  $\sqrt{k}$  раз. Та-



Фиг. 71. Простая кома — поперечные aberrации.



Фиг. 72. Кома, 2-й случай. Волновые aberrации.

ким образом, кривые равных волновых aberrаций будут теснее прижиматься к оси  $u_s$ . Следовательно, в направлении оси  $u_t$  область малых значений волновых aberrаций имеет большую протяженность; это выгодно тогда, когда зрачок системы вытянут в меридиональном направлении, что характерно для систем с положительным aberrационным виньетированием.

Перейдем к рассмотрению поперечных aberrаций. Пользуясь формулами (414), можно написать:

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_t &= C'' u^2 \sin^2 \gamma = \frac{C''}{2} u^2 (1 - \cos 2\gamma) \\ -\sigma_s &= C'' u^2 \sin 2\gamma \end{aligned} \right\} \quad (424)$$

Полученные выражения представляют собой параметрические уравнения замкнутой кривой с неодинаковыми осями. Эта кривая является эллипсом, центр которого смещен на величину вертикальной полуоси в вертикальном же направлении; таким образом, ось абсцисс является одной из касательных к эллипсу. При обходе зрачка по круговому контуру эллипс в плоскости изображения будет обойден лучом дважды, аналогично окружности в ранее рассмотренном случае. Задавая различными значениями угла  $\gamma$  (табл. 3), можно проследить характер образования эллипса.

Таблица 3

$\gamma$	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$	$225^\circ$	$270^\circ$	$315^\circ$	$360^\circ$
$-\frac{\sigma_t}{C''u^2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
$-\frac{\sigma_s}{C''u^2}$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

Обратим внимание на то, что при уменьшении апертурного угла  $u$  вид эллипса сохранится, как и касание его к оси абсцисс. Сопоставляя этот случай с ранее рассмотренным, нетрудно представить себе, что угол между касательными, равный  $60^\circ$ , станет равным  $180^\circ$ , — обе касательные будут продолжением одна другой (фиг. 73).

Фигура рассеяния для комы представляет собой семейство эллипсов, имеющих общую касательную.

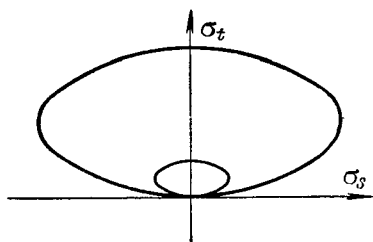
3-й случай.  $C'' = 0$ ;  $A_1' \neq 0$ . Общее выражение для волновой комы принимает следующий вид:

$$\epsilon = A_1' u_i^2. \quad (425)$$

Составляющие же поперечной аберрации для комы

$$-\sigma_t = 3A_1' u_i^2; \quad \sigma_s = 0. \quad (426)$$

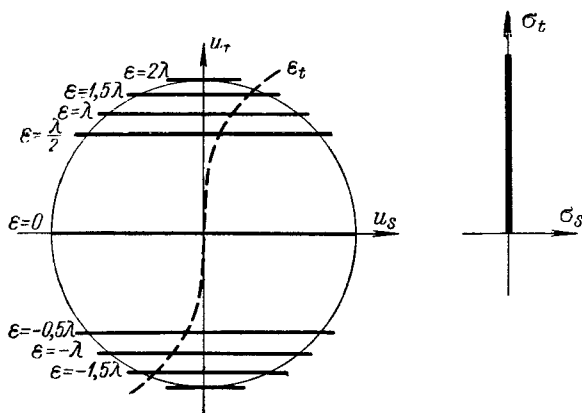
Кривые равных волновых аберраций обращаются в семейство прямых, параллельных оси абсцисс; меридиональный волновой фронт представит кубическую параболу, сагиттальный же волновой фронт даст волновую аберрацию, равную нулю. Составляющая поперечной аберрации будет существовать лишь только в меридиональной плоскости, и при круговом обходе по контуру на зрачке луч в плоскости изображения будет 4 раза обегать вдоль оси ординат. Рассматриваемый случай напоминает астигматизм при рассмотрении изображения в одном из фокусов; единственным отличием является то, что волновой фронт для случая астигматизма представляет параболу 2-й степени, а не 3-й. Кроме того, при перефокусировке нельзя найти



Фиг. 73. Кома, 2-й случай. Поперечные аберрации.

волновой фронт для случая астигматизма представляет параболу 2-й степени, а не 3-й. Кроме того, при перефокусировке нельзя найти

второго фокуса, как для случая астигматизма, а при диафрагмировании зрчка будет срезаться только один из концов этого «фокального» отрезка (фиг. 74).



Фиг. 74. Кома, 3-й случай. Волновые и поперечные aberrации.

Картина волновых и поперечных aberrаций показана на фиг. 74.

4-й случай.  $A'_i = -C''$ . Выражение для волновой комы принимает вид:

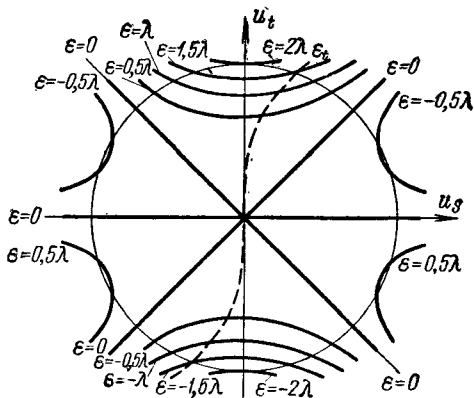
$$\begin{aligned} \epsilon &= A'_i (u_t^2 - u_s^2) u_t = \\ &= A'_i (u_t - u_s)(u_t + u_s) u_t \quad (427) \end{aligned}$$

и для составляющих поперечных aberrаций

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_t &= A'_i (3u_t^2 - u_s^2) \\ -\sigma_s &= -2A'_i u_t u_s \end{aligned} \right\} \quad (428)$$

Задаваясь  $\epsilon = 0$ , можно уравнение (427) представить в виде трех линейных уравнений, корнями которых будут

$$\begin{aligned} u_t &= u_s; & u_t &= -u_s; \\ u_t &= 0. \end{aligned} \quad (429)$$



Фиг. 75. Кома, 4-й случай. Волновые aberrации.

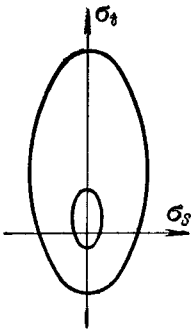
Таким образом, на плоскости зрчка существуют три прямых, вдоль которых будет отсутствовать волновая aberrация. Одна прямая явится сагиттальным волновым фронтом; две другие прямые составят с координатными осями углы  $\pm 45^\circ$  и пройдут через начало координат (фиг. 75). Знаки у волновых aberrаций, расположенных в соседних секторах, разделенных прямыми нулевых волновых aberrаций, будут чередоваться.

Пользуясь полярными координатами, находим выражения для составляющих поперечных aberrаций:

$$-\sigma_t = A'_i u^2 (3 \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) = A'_i u^2 (1 + 2 \cos 2\gamma); \quad (430)$$

$$-\sigma_s = -A'_i u^2 \sin 2\gamma. \quad (431)$$

Формулы (430) и (431) показывают, что в этом случае имеется семейство эллипсов, дважды обегаемых лучом при круговом обходе по зрачку; при этом большие оси эллипсов направлены вдоль оси ординат. Это семейство эллипсов не обладает общими касательными, так как эллипсы располагаются внутри друг друга (фиг. 76).



Фиг. 76. Кома, 4-й случай. Поперечные aberrации.

При переходе от 4-го случая к случаю 2, когда имело место равенство коэффициента  $A'_i$  нулю, две прямые нулевых волновых aberrаций, составлявшие угол  $90^\circ$ , сближаются до совмещения; тогда угол между этими прямыми изменяется от  $90$  до  $0^\circ$ . Поэтому можно подобрать такой угол, когда наступит равенство углов между всеми тремя прямыми нулевых волновых aberrаций.

Зададимся уравнениями

$$u_t = 0; \quad u_t = u_s \sqrt{3}; \quad u_t = -u_s \sqrt{3}, \quad (432)$$

определяющими равенство нулю волновых aberrаций вдоль трех прямых, составляющих углы, равные  $60^\circ$ .

Исходя из формулы (432), получим общее выражение для волновой aberrации:

$$\epsilon = A'_i (u_t^2 - 3u_s^2) u_t. \quad (433)$$

5-й случай. Из выражения (433) получаем соотношение коэффициентов, которое и примем за 5-й случай:

$$C'' = -3A'_i; \quad (434)$$

Далее уже нетрудно получить и выражения для составляющих поперечной aberrации:

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_t &= 3A'_i (u_t^2 - u_s^2) = -C'' (u_t^2 - u_s^2) \\ -\sigma_s &= 2C'' u_t u_s \end{aligned} \right\} \quad (435)$$

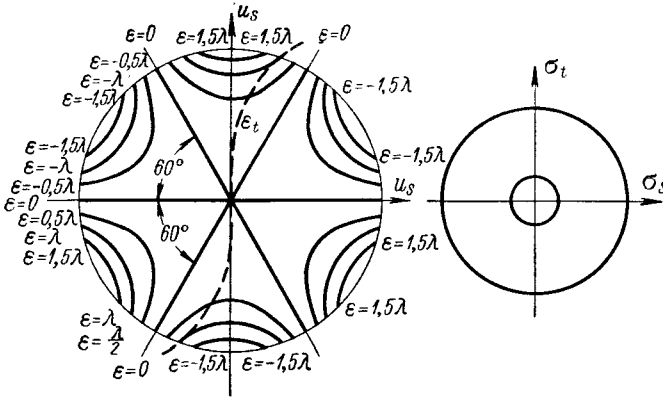
или, пользуясь полярными координатами,

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_t &= -C'' u^2 (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) = -C'' u^2 \cos 2\gamma \\ -\sigma_s &= C'' u^2 \sin 2\gamma \end{aligned} \right\} \quad (436)$$

Формулы (436) показывают, что имеется семейство окружностей, дважды обегаемых лучом при обходе кругового контура на зрачке, причем эти двойные окружности расположены концентрично друг



другу с центром в начале координат (фиг. 77). На фиг. 77 показана также и картина волновых aberrаций.



Фиг. 77. Кома, 5-й случай. Волновые и поперечные aberrации.

Поперечные aberrации для такой комы напоминают простую расфокусировку или сферическую aberrацию, но они резко изменяются при расфокусировке, теряя свою центрированность.

### § 35. Сочетание комы с астигматизмом

Общее выражение для волновой aberrации можно представить в следующем виде:

$$\epsilon = A'_i u_i^2 + A'_s u_s^2 + A''_i u_i^3 + C'' u_i u_s^2, \quad (437)$$

или, вводя угол обхода  $\gamma$  по круговому контуру на зрачке, в виде

$$\epsilon = A'_i u^3 \cos^2 \gamma + A'_s u^2 \sin^2 \gamma + A''_i u^3 \cos^3 \gamma + C'' u^3 \sin^2 \gamma \cos \gamma. \quad (438)$$

Рассматривая выражения (437) и (438), можно установить следующее.

1. Волновая aberrация по меридиональному волновому фронту определится уравнением

$$\epsilon = A'_i u_i^2 + A''_i u_i^3. \quad (439)$$

Корнями этого уравнения будут

$$u_i = 0; \quad u_i = -\frac{A'_i}{A''_i}. \quad (440)$$

Первый из этих двух корней — двойной, лежащий в начале координат; корень  $u_i = -\frac{A'_i}{A''_i}$  представляет собой по существу третий корень и всегда является вещественным. Волновая aberrация по обе стороны этого корня меняет знак на обратный, в то время как по обе стороны от двойного корня знак волновой aberrации сохраняется неизменным.

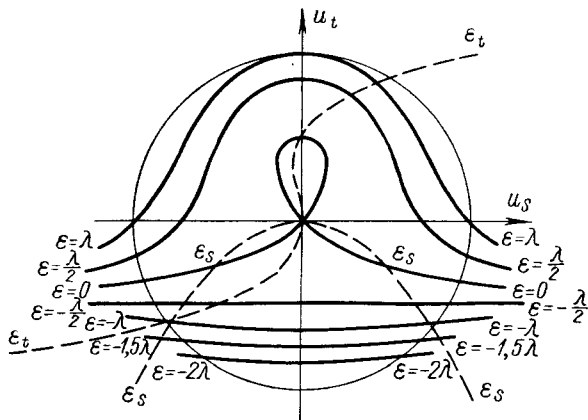
2. Вдоль сагиттального волнового фронта не будет наблюдаться отсутствия волновой aberrации; в рассматриваемом случае волновая aberrация будет изменяться по параболе второй степени согласно уравнению:

$$\varepsilon = A'_s u_s^2. \quad (441)$$

Определим уравнение кривой нулевой волновой aberrации. Решая уравнение (437) для случая  $\varepsilon = 0$  относительно  $u_s$ , получаем:

$$u_s = \pm u_t \sqrt{-\frac{A'_t + A'_t u_t}{A'_s + C'' u_t}}. \quad (442)$$

Возвращаясь к исходному уравнению волновой aberrации для случая одновременного наличия астигматизма и комы [формула (437)],



Фиг. 78. Сочетание комы с астигматизмом (волновые aberrации).

можно видеть, что при малых значениях апертурных углов  $u_t$  и  $u_s$  величина волновой aberrации будет определяться членами, выражающими астигматизм пучка. Наоборот, при больших значениях апертурных углов решающее значение приобретут члены, выражающие собой кому пучка. Задавая различные сочетания четырех коэффициентов  $A'_i$ ;  $A'_s$ ;  $A'_t$ ;  $C''$ , получим все возможные случаи сочетания комы с астигматизмом. Ограничимся рассмотрением одного частного случая — сочетания обычной комы третьего порядка (1-й случай комы, рассмотренный выше) с астигматизмом, рассмотренным во втором случае, когда плоскость изображения лежит между сагиттальным и меридиональным фокусами. Таким образом, остановимся на рассмотрении случая, когда  $A'_i = -A'_s$  и  $A'_t = C''$ .

Волновая aberrация может быть представлена уравнением

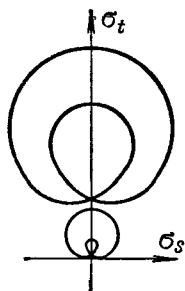
$$\varepsilon = A'_i (u_t^2 - u_s^2) + A'_t (u_t^2 + u_s^2) u_t \quad (443)$$

и составляющие поперечной aberrации уравнениями

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_t &= 2A'_i u_t + 3A'_t u_t^2 + A'_t u_s^2 \\ -\sigma_s &= -2A'_i u_s + 2A'_t u_t u_s \end{aligned} \right\} \quad (444)$$

Волновые aberrации для этого случая показаны на фиг. 78. Из фигуры видно, что в средней части зрачка наблюдается картина, характерная для астигматизма — кривая нулевых значений волновой aberrации в начале координат имеет узловую точку с касательными, наклоненными под углом  $45^\circ$  к осям координат; при возрастании апертурных углов кривые постоянных волновых aberrаций принимают вид, характерный для обыкновенной комы: эти кривые начинают асимптотически приближаться к прямой, параллельной оси абсцисс, и по волновому фронту приближаются к виду кубической параболы.

Картина поперечных aberrаций показана на фиг. 79; на этой же фигуре показано и сложение поперечных aberrаций от астигматизма и комы. Как видно из фигуры, введение астигматизма вызывает разделение ветвей двойной окружности, соответствующей



Фиг. 79. Сочетание комы с астигматизмом (поперечные aberrации).

соответствующей

### § 36. Сферическая aberrация

Сферическая aberrация третьего, пятого и даже седьмого порядков встречается довольно часто. В более или менее широкоугольных оптических системах, в пучках, оси которых составляют большие углы с осью системы, а апертурные углы в самих наклонных пучках невелики, можно с успехом ограничиваться определением aberrаций третьего порядка; наоборот, на оси системы, где апертурные углы принимают большие значения, необходимо учитывать сферическую aberrацию пятого, а иногда и еще более высокого порядка.

Займемся рассмотрением сферической aberrации третьего порядка. Исходя из формулы (375), перепишем выражение для волновой сферической aberrации:

$$\epsilon = A_t'' u_t^4 + C''' u_t^2 u_s^2 + A_s''' u_s^4. \quad (445)$$

Для составляющих поперечной сферической aberrации получаем, беря частные производные от волновой aberrации по соответственным апертурным углам:

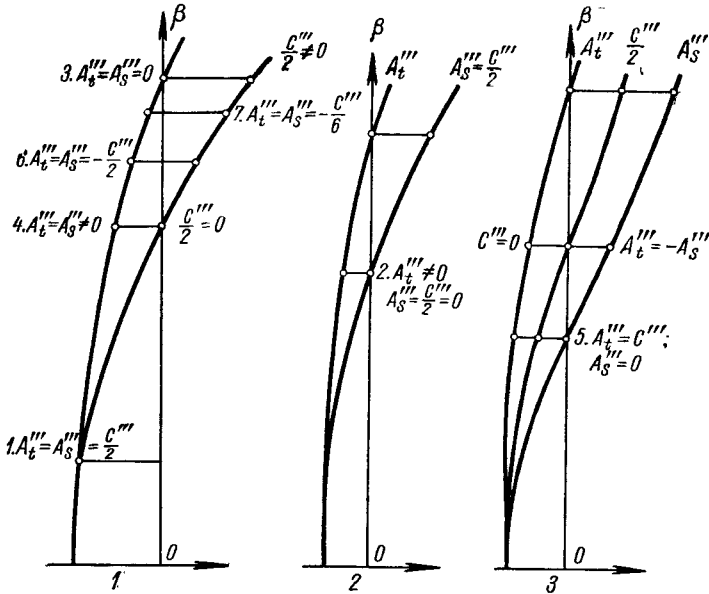
$$\left. \begin{aligned} -\sigma_t &= 4A_t'' u_t^3 + 2C''' u_t u_s^2 = 2(2A_t'' u_t^2 + C''' u_s^2) u_t \\ -\sigma_s &= 2C''' u_t^2 u_s + 4A_s''' u_s^3 = 2(C''' u_t^2 + 2A_s''' u_s^2) u_s \end{aligned} \right\} \quad (446)$$

Проследим характер изменения коэффициентов сферической aberrации по полю (фиг. 80). На этой фигуре показан возможный ход кривых, выражающих изменение коэффициентов сферической aberrации, для трех случаев.

1. Два коэффициента  $A_t'''$  и  $A_s'''$  изменяются по полю одинаково; третий коэффициент  $\frac{C}{2}$  изменяется более быстро (или более медленно).

2. Одинаково изменяются коэффициенты  $A_s'''$  и  $\frac{C'''}{2}$ ; третий коэффициент  $A_t'''$  изменяется медленнее (или быстрее).

3. Все три коэффициента изменяются различно. Заметим, что в самом начале (что соответствует области абберации третьего порядка вблизи оси системы) все три коэффициента сферической абберации



Фиг. 80. Изменение сферической абберации по полю зрения.

оказываются равными друг другу. Такое сочетание коэффициентов встречается наиболее часто.

*1-е сочетание.* Коэффициенты  $A_t''' = \frac{C'''}{2} = A_s''' = \frac{B}{4}$ . В этом случае выражение для волновой абберации принимает вид:

$$\epsilon = A_t''' (u_t^2 + 2u_t^2 u_s^2 + u_s^4) = A_t''' (u_t^2 + u_s^2)^2 = A_t''' u^4. \quad (447)$$

Формула (447) показывает, что в этом случае волновая абберация при постоянном значении апертурного угла  $u$  не будет зависеть от величины угла обхода по круговому контуру на зрачке, т. е. будет центрированной относительно оси пучка (оси системы, если рассматриваемый пучок совпадает своим главным лучом с осью).

Составляющие поперечной абберации для рассматриваемого случая примут вид:

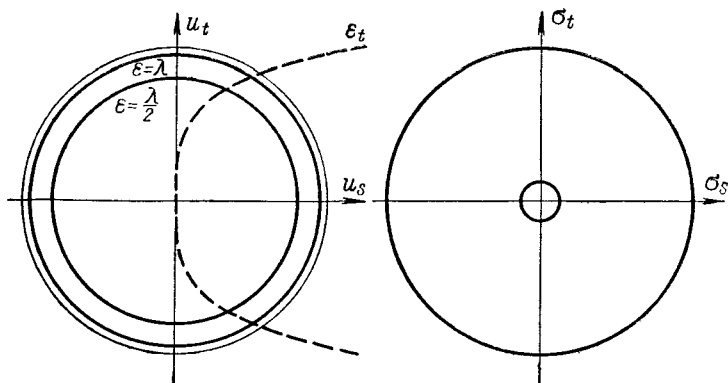
$$\left. \begin{aligned} -\sigma_t &= B (u_t^2 + u_s^2) u_t \\ -\sigma_s &= B (u_t^2 + u_s^2) u_s \end{aligned} \right\} \quad (448)$$

и после введения угла обхода по контуру на зрачке

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= Bu^3 \cos \gamma \\ -\sigma_s &= Bu^3 \sin \gamma \end{aligned} \right\} \quad (449)$$

В этом случае картина поперечных aberrаций представляется в виде окружностей, concentричных главному лучу (оси).

Радиус окружностей, описываемых лучом в плоскости изображения, будет пропорционален 3-й степени апертурного угла. Картина волновой и поперечной aberrаций показана на фиг. 81. Волновой фронт представится параболой 4-й степени.



Фиг. 81. Сферическая aberrация, 1-й случай

*2-е сочетание.* Коэффициент  $A_i''' \neq 0$ ; коэффициенты  $A_s''' = C''' = 0$ . В этом случае общее выражение для волновой aberrации принимает вид

$$\epsilon = A_i''' u_i^4. \quad (450)$$

Меридиональный волновой фронт остается таким же, как и в первом случае, сагиттальный же волновой фронт даст волновую aberrацию, равную нулю.

Составляющие поперечной aberrации выразятся формулами:

$$-\sigma_t = 4A_i''' u_i^3 = 4A_i''' u^3 \cos^3 \gamma; \quad \sigma_s = 0. \quad (451)$$

Отсюда видно, что поперечные aberrации выразятся отрезком прямой, лежащим в меридиональной плоскости и обегаемым лучом за один обход. Волновые и поперечные aberrации показаны на фиг. 82. При  $A_s''' \neq 0$  и  $C''' = A_s''' = 0$  картина окажется повернутой на  $90^\circ$ . Этот случай напоминает картину, имеющую место при астигматизме.

*3-е сочетание.* Коэффициент  $C''' \neq 0$ ; коэффициенты  $A_i''' = A_s''' = 0$ . Выражение для волновой aberrации представится в следующем виде:

$$\epsilon = C''' u_i^2 u_s^2. \quad (452)$$

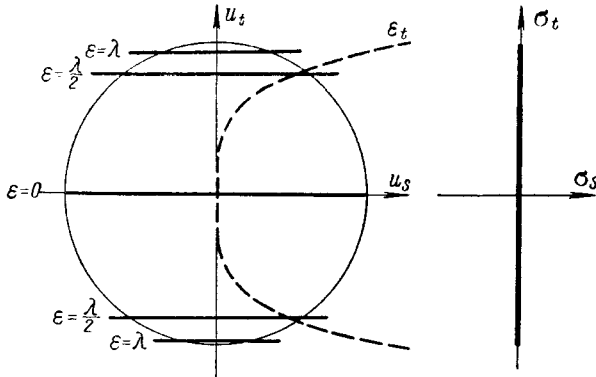
Как меридиональный, так и сагиттальный волновой фронт даст значения волновой aberrации равные нулю. Волновая aberrация будет иметь один и тот же знак, что и коэффициент  $C'''$ , так как апертурные углы входят в выражение для волновой aberrации в квадратах.

Кривые равных волновых aberrаций очень напоминают по внешнему виду равнобочные гиперболы, хотя в действительности не являются гиперболой.

Для составляющих поперечной aberrации получаем следующие выражения:

$$-\sigma_t = 2C''' u_t u_s^2; \quad -\sigma_s = 2C''' u_t^2 u_s. \quad (453)$$

В этом случае составляющие поперечной aberrации окажутся равными нулю как в меридиональной, так и в сагиттальной плоскостях; однако, несмотря на это, в промежутках между меридиональной



Фиг. 82. Сферическая aberrация, 2-й случай.

и сагиттальной плоскостями поперечные aberrации отличны от нуля. Выразим составляющие поперечной aberrации в полярных координатах:

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_t &= 2C''' u^3 \sin^2 \gamma \cos \gamma \\ -\sigma_s &= 2C''' u^3 \sin \gamma \cos^2 \gamma \end{aligned} \right\} \quad (454)$$

Рассмотрим участок кривой, выражаемой уравнениями (454), проходящий вблизи оси абсцисс, когда угол  $u_t$  мал. Тогда меридиональная составляющая поперечной aberrации окажется второго порядка малости, а сагиттальная составляющая — первого порядка малости: участок кривой будет касаться оси абсцисс в начале координат. В равной мере при угле  $\gamma$ , близком по величине к  $90^\circ$ , участок кривой поперечной aberrации будет касаться оси ординат также в начале координат. При обходе луча по круговому контуру на зрачке луч опишет в плоскости изображения кривую, состоящую из четырех симметрично расположенных лепестков. Эта картина, а также волновые aberrации показаны на фиг. 83.

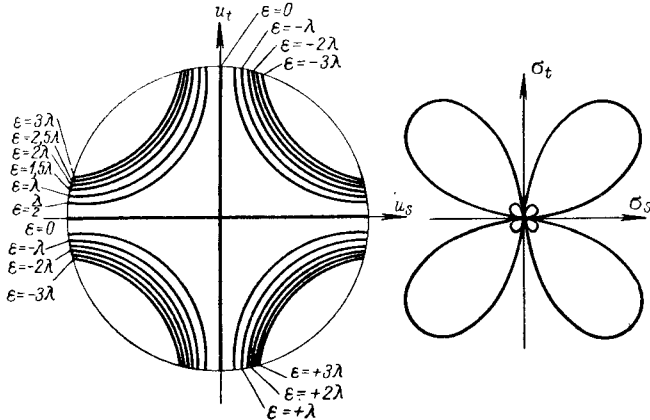
**4-е сочетание.** Коэффициент  $C''' = 0$ ; коэффициенты  $A_t''' = A_s''' \neq 0$ . Для этого случая выражение волновой aberrации принимает вид:

$$\epsilon = A_t''' (u_t^4 - u_s^4). \quad (455)$$

Преобразуем это выражение, пользуясь полярными координатами. Находим:

$$\varepsilon = A_t''' \left( 1 - \frac{\sin^2 2\gamma}{2} \right) u^4; \quad (456)$$

при любых значениях угла  $\gamma$   $\sin \gamma \leq 1$ ; поэтому в данном случае волновая aberrация имеет тот же самый знак, что и коэффициент  $A_t'''$ .



Фиг. 83. Сферическая aberrация, 3-й случай.

Задавая в формуле (456) углу  $\gamma$  значения, равные  $0$ ;  $\frac{\pi}{2}$ ;  $\pi$  и т. д., получаем для волновой aberrации значения, равные

$$\varepsilon = A_t''' u^4. \quad (457)$$

Задавая же углу  $\gamma$  значения, равные  $\frac{\pi}{4}$ ;  $\frac{3\pi}{4}$ ;  $\frac{5\pi}{4}$  и т. д., получаем для волновой aberrации вдвое меньшие значения, равные

$$\varepsilon = \frac{1}{2} A_t''' u^4. \quad (458)$$

Полагая волновую aberrацию  $\varepsilon$  постоянной, можно найти для двух выбранных рядов значений угла  $\gamma$  величины соответствующих апертурных углов  $u$ :

$$u_1 = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{A_t'''}}; \quad u_2 = \sqrt[4]{\frac{2\varepsilon}{A_t'''}}; \quad (459)$$

откуда нетрудно прийти к выводу, что кривые равных волновых aberrаций обладают наибольшей выпуклостью для направлений, проходящих через начало координат под углами в  $45^\circ$ .

Для составляющих поперечной aberrации получаем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_t &= 4A_t''' u_t^3 \\ -\sigma_s &= 4A_s''' u_s^3 \end{aligned} \right\} \quad (460)$$

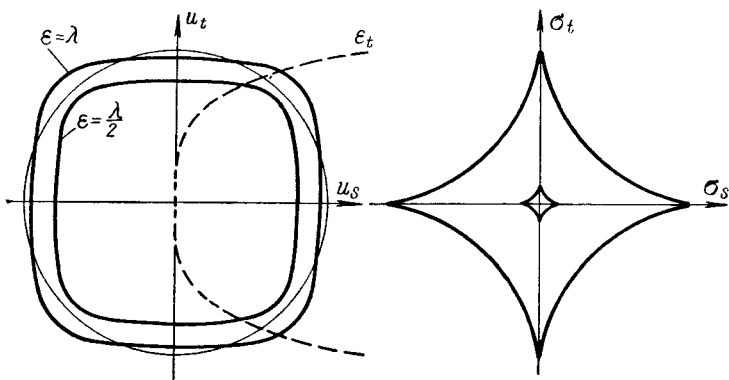
в плоскости изображения луч опишет кривую, являющуюся а с т р о и д о й.

Картина волновых и поперечных aberrаций показана на фиг. 84. Этот случай характерен для комбинации двух одинаковых цилиндрических линз, повернутых под углом  $90^\circ$  друг к другу.

5-е сочетание. Коэффициент  $A_s''' = 0$ ; коэффициенты  $A_s''' = C''' \neq 0$ . Для этого случая волновая aberrация принимает вид:

$$\varepsilon = A_i''' (u_i^2 + u_s^2) u_i^2 = A_i''' u^4 \cos^2 \gamma. \quad (461)$$

Меридиональный волновой фронт выразится параболой 4-й степени; сагиттальный волновой фронт даст волновую aberrацию, равную нулю.



Фиг. 84. Сферическая aberrация, 4-й случай.

Задавая волновой aberrации некоторое постоянное значение, не равное нулю, получим кривую равной волновой aberrации.

Можно показать, что в данном случае кривые равных волновых aberrаций при увеличении апертурного угла  $u_s$  будут давать уменьшение апертурного угла  $u_i$ ; таким образом, кривые равных волновых aberrаций будут асимптотически приближаться к оси абсцисс. Однако в выражение для волновой aberrации все апертурные углы входят в четных степенях; отсюда следует, что волновая aberrация всегда имеет тот же самый знак, что и коэффициент  $A_i'''$ . По своей форме кривые равных волновых aberrаций напоминают кривые равных волновых aberrаций в случае обыкновенной комы третьего порядка.

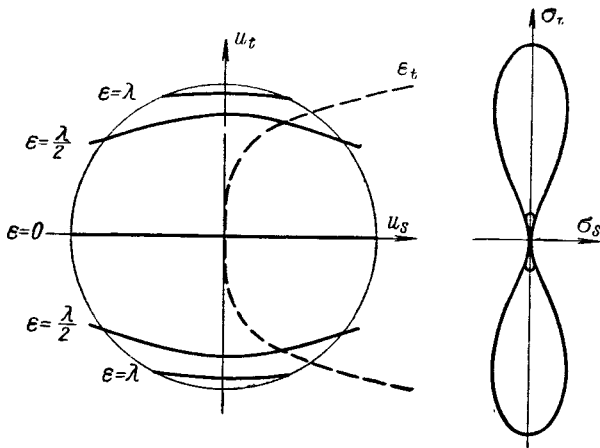
Обращаясь к составляющим поперечной aberrации, находим:

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_t &= 2A_i''' (2u_i^2 + u_s^2) u_i = 2A_i''' u^3 (1 + \cos^2 \gamma) \cos \gamma \\ -\sigma_s &= 2A_i''' u_i^2 u_s = 2A_i''' u^3 \cos^2 \gamma \sin \gamma \end{aligned} \right\} \quad (462)$$

В случае, когда угол  $\gamma$  близок к  $90^\circ$ , составляющая поперечной aberrации  $\sigma_s$  будет величиной второго порядка малости, а составляющая поперечной aberrации  $\sigma_t$  — величиной первого порядка малости. В силу этого все кривые поперечных aberrаций при обходе по круговому контуру на зрачке должны оказаться касательными к оси ординат. Кроме того, при значении угла  $\gamma = 0$  сагиттальная составляющая



$\sigma_s$  равна нулю. Картина волновых и поперечных aberrаций показана на фиг. 85. Картина поперечных aberrаций напоминает кому, но с двумя хвостами, направленными в противоположные стороны.



Фиг. 85. Сферическая aberrация, 5-й случай.

*6-е сочетание.* Коэффициенты  $A_t''' = A_s''' = -\frac{C'''}{2}$ . Напишем выражение для волновой aberrации:

$$\epsilon = A_t''' u_t^4 - 2A_t''' u_t^2 u_s^2 + A_t''' u_s^4 = A_t''' (u_t^2 - u_s^2)^2. \quad (463)$$

Осуществим поворот координатных осей на некоторый угол  $\alpha$ . Пользуясь формулами для поворота координатных осей

$$\left. \begin{aligned} x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha &= x \\ x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha &= y \end{aligned} \right\} \quad (464)$$

преобразуем выражение для волновой aberrации (463). Находим:

$$\epsilon = A_t''' [u_t'^2 \cos^2 \alpha - 2u_t' u_s' \sin \alpha \cos \alpha + u_s'^2 \sin^2 \alpha - u_t'^2 \sin^2 \alpha - 2u_t' u_s' \sin \alpha \cos \alpha + u_s'^2 \cos^2 \alpha]^2 \quad (465)$$

и, пользуясь формулами для двойного угла, окончательно получаем

$$\epsilon = A_t''' [u_t'^2 \cos 2\alpha - 2u_t' u_s' \sin 2\alpha - u_s'^2 \cos 2\alpha]^2. \quad (466)$$

Задавая поворот координатных осей на угол в  $45^\circ$ , приходим к рассмотренному ранее случаю 3 [формула (452)]:

$$\epsilon = 4A_t''' u_t'^2 u_s'^2. \quad (467)$$

*7-е сочетание.* Определим этот случай равенством коэффициентов:

$$C''' = -6A_t''' = -6A_s'''. \quad (468)$$

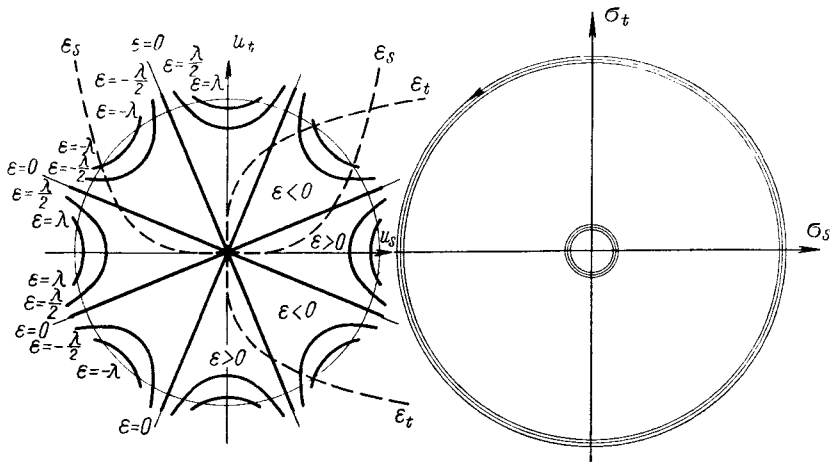
Уравнение для волновой aberrации может быть представлено в следующем виде:

$$\epsilon = A_t''' (u_t^4 - 6u_t^2 u_s^2 + u_s^4). \quad (469)$$

Решая это биквадратное уравнение при  $\varepsilon = 0$ , находим:

$$u_t = \pm u_s \sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}} = \pm (1 \pm \sqrt{2}) u_s. \quad (470)$$

Из этой формулы следует, что кривыми равных нулю волновых aberrаций являются четыре прямые, проходящие через начало координат под углами  $\pm 22^\circ 30'$  и  $\pm 67^\circ 30'$  и разделяющие зрачок на восемь равных друг другу частей. При переходе от одного из этих секторов к другому волновые aberrации изменяют знаки на обратные.



Фиг. 86. Сферическая aberrация, 7-й случай.

Перейдем к поперечным aberrациям. Беря, как обычно, частные производные от волновой aberrации по соответствующим апертурным углам, получаем:

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_t &= A_t''' (4u_t^3 - 12u_t u_s^2) = 4A_t''' (u_t^3 - 3u_s^2) u_t \\ -\sigma_s &= A_t''' (-12u_t^2 u_s + 4u_s^3) = -4A_t''' (3u_t^2 - u_s^2) u_s \end{aligned} \right\} \quad (471)$$

Перейдем к полярным координатам:

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_t &= 4A_t''' u^3 (\cos^2 \gamma - 3 \sin^2 \gamma) \cos \gamma \\ -\sigma_s &= -4A_s''' u^3 (3 \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \sin \gamma \end{aligned} \right\} \quad (472)$$

Преобразуем полученные выражения. Пользуясь формулами для тройных углов, представим выражения (472) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_t &= 4A_t''' u^3 [\cos 2\gamma \cos \gamma - 2 \sin^2 \gamma \cos \gamma] = 4A_t''' u^3 \cos 3\gamma \\ -\sigma_s &= -4A_s''' u^3 [\cos 2\gamma \sin \gamma + 2 \cos^2 \gamma \sin \gamma] = -4A_s''' u^3 \sin 3\gamma \end{aligned} \right\} \quad (473)$$

Формулы (473) показывают что при обходе зрачка по круговому контуру луч трижды обегает круговой контур в плоскости изображения в направлении, обратном обходу контура на зрачке. Картины волновых и поперечных aberrаций показаны на фиг. 86.

### § 37. Сферическая aberrация пятого порядка на оси системы

На оси системы при более или менее значительных апертурных углах нередко приходится иметь дело со сферической aberrацией пятого порядка, более высокого, нежели сферическая aberrация третьего порядка. Сферическая aberrация пятого порядка обычно встречается в сочетании со сферической aberrацией третьего порядка; общее выражение для волновой сферической aberrации при наличии как третьего, так и пятого порядков может быть представлено в следующем виде:

$$\varepsilon = A'''u^4 + A^V u^6 \quad (474)$$

Дифференцируя формулу (474), получаем выражение для поперечной aberrации:

$$-\sigma = \frac{d\varepsilon}{du} = 4A'''u^3 + 6A^V u^5. \quad (475)$$

В рассматриваемом случае, ввиду концентричности пучка оси, не делаем разделения на меридиональную и сагиттальную составляющие  $\sigma_t$  и  $\sigma_s$ .

Для выражение для поперечной aberrации на апертурный угол  $u$ , можно получить выражение для продольной сферической aberrации  $\Delta s'$ . Находим:

$$\Delta s' = \frac{\sigma}{u} = -4A'''u^2 - 6A^V u^4 = \Delta s'_{III} + \Delta s'_{V} = au^2 + bu^4. \quad (476)$$

Отдельные слагаемые — сферическая aberrация третьего порядка  $\Delta s'_{III}$  и сферическая aberrация пятого порядка  $\Delta s'_{V}$  могут быть представлены отдельно:

$$\Delta s'_{III} = -4A'''u^2 = au^2; \quad \Delta s'_{V} = -6A^V u^4 = bu^4. \quad (477)$$

Можно выразить коэффициенты  $A'''$  и  $A^V$  волновой сферической aberrации через величины продольной сферической aberrации третьего и пятого порядков. Получаем:

$$A''' = -\frac{\Delta s'_{III}}{4u^2}; \quad A^V = -\frac{\Delta s'_{V}}{6u^4}, \quad (478)$$

откуда можно выразить через величины продольной сферической aberrации третьего и пятого порядков и волновую сферическую aberrацию  $\varepsilon$ :

$$-\varepsilon = \left( \frac{\Delta s'_{III}}{2} + \frac{\Delta s'_{V}}{3} \right) \frac{u^2}{2}. \quad (479)$$

Введем для удобства некоторую вспомогательную величину  $x = u^2$ . Тогда выражение для волновой aberrации может быть представлено в виде

$$-\varepsilon = \frac{a}{4} x^2 + \frac{b}{6} x^3. \quad (480)$$

Для исправления сферической aberrации при наличии пятых порядков обычно добиваются уничтожения сферической aberrации на краю отверстия при некотором заданном угле  $u_1$  или величине  $x_1$ .

Тогда можно написать:

$$\Delta s' = 0 = \Delta s'_{III} + \Delta s'_V = au_1^2 + bu_1^4 = ax_1 + bx_1^2. \quad (481)$$

Можно определить величину такого отношения коэффициентов  $a$  и  $b$ , при котором имеет место соблюдение условия (481). Находим, решая уравнение (481) относительно  $x_1$ :

$$x_1 = 0; \quad x_1 = -\frac{a}{b} = u_1^2; \quad a = -bu_1^2 = -bx_1. \quad (482)$$

Общее выражение для продольной сферической aberrации при этом принимает следующий вид:

$$\Delta s' = -bu_1^2 u^2 + bu^4 = (-x_1 + x)bx. \quad (483)$$

Найдем величину максимума сферической aberrации. Дифференцируя формулу (483) и приравнявая нулю первую производную, находим:

$$\frac{d(\Delta s')}{du} = 0 = -2bu_1^2 u_{\max} + 4bu_{\max}^3. \quad (484)$$

Корнями уравнения (484) будут

$$u_{\max} = 0; \quad u_{\max} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} u_1 \quad (485)$$

или

$$x_{\max} = \frac{x_1}{2}. \quad (486)$$

Обратимся к выражению для волновой aberrации. Пользуясь формулой (482), можно формулу (480) представить в виде

$$-\varepsilon = -\frac{b}{4} x_1 x^2 + \frac{b}{6} x^3. \quad (487)$$

Дифференцируя выражение (487) дважды и приравнявая к нулю вторую производную, получаем:

$$-\frac{d\varepsilon}{dx} = -\frac{2b}{4} x_1 x + \frac{3b}{6} x^2 = (-x_1 + x) \frac{b}{2} x; \quad (488)$$

$$-\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} = 0 = -\frac{b}{2} x_1 + bx_0; \quad x_0 = \frac{x_1}{2} = x_{\max}, \quad (489)$$

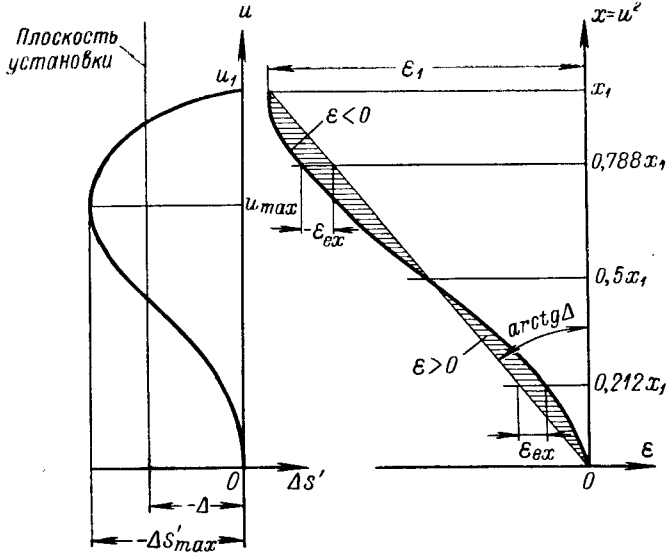
откуда можно установить, что точка перегиба на кривой волновой aberrации соответствует точке максимума на кривой продольной сферической aberrации.

Формы кривых продольной сферической aberrации и волновой aberrации для этого случая приведены на фиг. 87.

Рассматривая форму кривой волновой aberrации, можно установить, что обычно применяемому исправлению продольной сферической aberrации соответствует не наилучшее исправление волновой aberrации. Тем не менее, величина волновой aberrации может быть существенно уменьшена, если рассматривать картину волновых aberrаций не из точки, соответствующей плоскости «идеального» изобра-

жения (начала координат), а из точки, лежащей в плоскости, несколько смещенной относительно начала координат, т. е. из «точки наводки» (лежащей в «плоскости установки»).

Расстояние плоскости установки от начала координат, равное  $\Delta$ , условимся называть расфокусировкой; эту величину можно включить как в величину продольной сферической



Фиг. 87. Сферическая абберация на оси системы при наличии пятых порядков.

абберации, так и в выражение для волновой абберации, вводя некоторый, учитывающий расфокусировку коэффициент волновой абберации при квадрате апертурного угла. Для продольной сферической абберации получим:

$$\Delta s'_\Delta = \Delta + au^2 + bu^4. \quad (490)$$

Для поперечной абберации получим:

$$\sigma_\Delta = \Delta u + au^3 + bu^5 \quad (491)$$

и для волновой абберации при расфокусировке  $\Delta$ :

$$-\varepsilon_\Delta = \frac{\Delta}{2} u^2 + \frac{a}{4} u^4 + \frac{b}{6} u^6 = \frac{\Delta}{2} x + \frac{a}{4} x^2 + \frac{b}{6} x^3. \quad (492)$$

Предположим, что при расфокусировке волновая абберация на краю отверстия будет равна нулю:

$$\frac{\Delta}{2} x_1 + \frac{a}{4} x_1^2 + \frac{b}{6} x_1^3 = 0, \quad (493)$$

откуда

$$x_1 = 0; \quad \Delta = \frac{bx_1^2}{2} - \frac{bx_1^2}{3} = \frac{b}{6} x_1^2. \quad (494)$$

Пользуясь фиг. 87, легко показать, что внесение расфокусировки на графике волновой aberrации равносильно производству отсчетов от некоторой наклонной прямой, проходящей через начало координат с угловым коэффициентом, равным  $\frac{bx_1^2}{12}$ . Это позволяет весьма просто определять величину расфокусировки, вводимой для уменьшения волновых aberrаций, посредством прочерчивания на графике волновой aberrации прямой, от которой, как от оси, отсчитывается волновая aberrация, соответствующая данной расфокусировке.

Определим величины остаточных волновых aberrаций для случая расфокусировки, соответствующей волновой aberrации для края отверстия, равной нулю. Обозначим волновую aberrацию до расфокусировки через  $\varepsilon_1$ ; после расфокусировки — через  $\varepsilon_\Delta$ . Продольная сферическая aberrация для рассматриваемого случая на краю отверстия была равна нулю.

Для исходной волновой aberrации будет иметь место выражение:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta}{2} x_1 = \frac{b}{12} x_1^3. \quad (495)$$

Уравнение для волновой aberrации с учетом расфокусировки получит следующий вид:

$$-\varepsilon_\Delta = \frac{b}{12} x_1^2 x - \frac{b}{4} x_1 x^3 + \frac{b}{6} x^3. \quad (496)$$

Найдем экстремальные точки для волновой aberrации с учетом расфокусировки.

Дифференцируя уравнение (496), получаем, приравнявая первую производную нулю:

$$-\frac{d\varepsilon_\Delta}{dx} = 0 = \frac{b}{12} x_1^2 - \frac{b}{2} x_1 x + \frac{b}{2} x^2, \quad (497)$$

откуда находим корни, определяющие экстремальные точки.

$$x_{\text{ex}} = \frac{x_1}{2} \pm \sqrt{\frac{x_1^2}{4} - \frac{x_1^2}{6}} = \frac{x_1}{2} \left[ 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \right]. \quad (498)$$

Подставляя полученные значения величины  $x_{\text{ex}}$  в выражение (496) для волновой aberrации с учетом расфокусировки, найдем экстремальные значения волновой aberrации:

$$\varepsilon_{\text{ex}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{196} b x_1^3. \quad (499)$$

Для сопоставления дадим значение исходной волновой aberrации:

$$\varepsilon_1 = \frac{b}{12} x_1^3. \quad (500)$$

Из сопоставления формул (499) и (500) видно, что изменение положения плоскости наводки может в 8—10 раз уменьшить величину волновой aberrации.

Обратимся к исходной формуле для продольной сферической аберрации [формула (483)]. Подставляя в формулу значение  $x_{\max}$ , определяющее собой зону сферической аберрации, получаем для этой зоны

$$\Delta s'_{\max} = \left( -x_1 + \frac{x_1}{2} \right) b \frac{x_1}{2} = -\frac{b}{4} x_1^2. \quad (501)$$

Выразим теперь через величину зоны сферической аберрации  $\Delta s'_{\max}$  величину найденной расфокусировки. Находим:

$$\Delta = \frac{b}{6} x_1^2 = -\frac{2}{3} \Delta s'_{\max}. \quad (502)$$

Полученная плоскость наводки значительно выгоднее, нежели плоскость, соответствующая плоскости идеального изображения, однако условия для нахождения плоскости наводки еще не определяют наивыгоднейшей плоскости наводки, так как определение наивыгоднейшего положения плоскости изображения должно быть связано с получением максимальной освещенности; решение же этой последней задачи не может быть выполнено без учета длины волны.

### § 38. Переход от поперечных аберраций к волновым аберрациям

Формулы для определения хода луча давно разработаны рядом авторов; однако в настоящее время отсутствуют формулы для определения волновых аберраций при прохождении световых пучков через оптическую систему. Поэтому возникает необходимость в выводе формул, позволяющих использовать для определения волновых аберраций найденные ранее значения поперечных аберраций.

Для решения этой задачи воспользуемся известной зависимостью, выраженной формулами (394); при этом следует учесть, что величины поперечных аберраций обычно задаются графически, без разделения их на отдельные составляющие.

Напишем общее выражение для волновой аберрации, разбивая его на отдельные слагаемые и рассматривая составляющую аберрации в меридиональной плоскости:

$$\varepsilon_t = A'_t u_t^2 + A''_t u_t^3 + A'_t u_t^4 = \varepsilon_{It} + \varepsilon_{II t} + \varepsilon_{III t}. \quad (503)$$

Равным образом разобьем на отдельные слагаемые и выражение для поперечных аберраций в меридиональной плоскости:

$$-\sigma_t = 2A'_t u_t + 3A''_t u_t^2 + 4A'''_t u_t^3 = -\sigma_{It} - \sigma_{II t} - \sigma_{III t}. \quad (504)$$

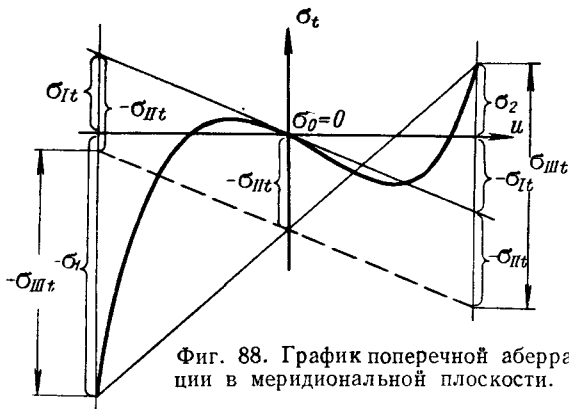
Рассматривая каждое из слагаемых отдельно, можно написать:

$$-\varepsilon_I = \frac{\sigma_{It}}{2} u_t; \quad -\varepsilon_{II t} = \frac{\sigma_{II t}}{3} u_t; \quad -\varepsilon_{III t} = \frac{\sigma_{III t}}{4} u_t, \quad (505)$$

и, таким образом, волновая аберрация может быть выражена через слагаемые поперечных аберраций:

$$-\varepsilon_t = \left[ \frac{\sigma_{It}}{2} + \frac{\sigma_{II t}}{3} + \frac{\sigma_{III t}}{4} \right] u_t. \quad (506)$$

Рассмотрим кривую поперечных aberrаций для меридиональной плоскости (фиг. 88). Условимся рассматривать картину поперечных aberrаций в плоскости, перпендикулярной оси пучка (главному лучу пучка).



Фиг. 88. График поперечной aberrации в меридиональной плоскости.

Представим себе, что кривая поперечных aberrаций задана тремя парами значений апертурных углов и поперечных aberrаций:

$$\sigma_1 \text{ и } u_1; \quad \sigma_2 \text{ и } u_2; \quad \sigma_0 \text{ и } u_0 = 0. \quad (507)$$

Получим значения поперечных aberrаций для различных апертурных углов  $u_1$  и  $u_2$ :

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_1 &= 2A'_1 u_1 + 3A''_1 u_1^2 + 4A'''_1 u_1^3 - \sigma_0 \\ -\sigma_2 &= 2A'_2 u_2 + 3A''_2 u_2^2 + 4A'''_2 u_2^3 - \sigma_0 \end{aligned} \right\} \quad (508)$$

Полагая апертурные углы  $u_1$  и  $u_2$  равными друг другу по величине и обратными по знаку

$$u_1 = -u_2 \quad (509)$$

и складывая друг с другом выражения для  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , найдем:

$$-(\sigma_1 + \sigma_2) = -2\sigma_0 + 6A''_1 u_1^2 = -2\sigma_0 - 2\sigma_{11t}, \quad (510)$$

откуда легко находится слагаемое  $\sigma_{11t}$  — поперечная меридиональная кома пучка:

$$\sigma_{11t} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \sigma_0. \quad (510a)$$

Продифференцируем формулу (504) и приравняем апертурный угол  $u_i$  нулю (переходим к рассмотрению главного луча). Тогда получаем:

$$-\left[ \frac{d\sigma_i}{du_i} \right]_{u_i=0} = 2A'_i = x_i = -\frac{\sigma_{1t}}{u_i}. \quad (511)$$

Можно показать, что формула (511) выражает собой угловой коэффициент касательной к кривой поперечной aberrации для точки,



определяемой главным лучом; этот коэффициент равен величине меридионального искривления изображения  $x_t$ , равной величине поперечной меридиональной кривизны  $\sigma_{1t}$ , деленной на соответствующий апертурный угол. На графике поперечной аберрации меридиональная кривизна  $\sigma_{1t}$  может быть найдена как расстояние от точки, определяемой главным лучом, до точки пересечения касательной (проведенной к кривой поперечной аберрации в точке, соответствующей главному лучу) с прямой, ограничивающей апертурный угол  $u_t$ .

Второе слагаемое поперечной аберрации  $\sigma_{11t}$ , выражающее собой поперечную кому, определяется расстоянием от точки кривой, измеренным вдоль оси  $\sigma_t$ , соответствующей главному лучу, до прямой, соединяющей концы кривой поперечной аберрации.

Перейдем к определению третьего слагаемого поперечной аберрации  $\sigma_{111t}$ , определяемого сферической аберрацией. Составляя разность выражений для поперечных аберраций  $\sigma_2$  и  $\sigma_1$ , находим при наблюдении условия (509):

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 2A'_t(u_1 - u_2) + 4A_t'''(u_1^3 - u_2^3) = 2(\sigma_{1t} + \sigma_{111t}) \quad (512)$$

(при  $u_1 = -u_2$ ), откуда

$$\sigma_{111t} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} - \sigma_{1t}. \quad (513)$$

Для нахождения коэффициентов, определяющих ход лучей, не лежащих в меридиональной плоскости, удобно пользоваться величинами составляющих поперечных аберраций, принадлежащих косому лучу, расположенному в сагиттальной плоскости; апертурный угол такого луча  $u_t = 0$ . В этом случае составляющие поперечной аберрации выразятся следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_t &= C''u_s^2 \\ -\sigma_s &= 2A'_s u_s + 4A_s''' u_s^3 = -\sigma_{1s} - \sigma_{111s} \end{aligned} \right\} \quad (514)$$

Формулы (514) связывают между собой величины трех не рассмотренных ранее коэффициентов с величинами поперечных аберраций косого луча. Из этих формул можно сразу вычислить величину поперечной сагиттальной комы:

$$\sigma_{11s} = [\sigma_t]_{u_t=0}. \quad (515)$$

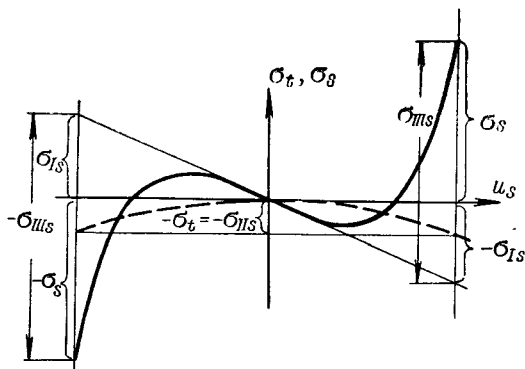
Дифференцируя выражение для сагиттальной поперечной аберрации по сагиттальному апертурному углу  $u_s$ , получаем, приравнявая затем апертурный угол  $u_s$  нулю:

$$-\left[\frac{d\sigma_s}{du_s}\right]_{u_s=0} = 2A'_s = x_s = -\frac{\sigma_{1s}}{u_s}. \quad (516)$$

Обратимся к фиг. 89, на которой даны две кривые, определяющие ход изменения меридиональной и сагиттальной составляющих поперечных аберраций косых лучей, идущих в сагиттальной плоскости. Из фигуры видно, что полученный коэффициент  $2A'_s$  выражает угло-

вой коэффициент касательной к кривой сагиттальной составляющей поперечной aberrации косо́го луча в точке, соответствующей главному лучу.

Величина поперечной сагиттальной комы определится стрелкой кривой меридиональной составляющей поперечной aberrации для косо́го луча, идущего в сагиттальной плоскости.



Фиг. 89. График поперечной aberrации в сагиттальной плоскости.

Зная коэффициент  $2A'_s$  можно с помощью формулы (514) найти коэффициент  $4A''_s$ . Получаем:

$$4A''_s = -\frac{\sigma_s - \sigma_{I_s}}{u_s^2}. \quad (517)$$

Пользуясь формулами (515) — (517), можно получить выражение для сагиттального волнового фронта:

$$\epsilon_s = A'_s u_s^2 + A''_s u_s^4 = -\left(\frac{\sigma_{I_s}}{2} + \frac{\sigma_{III_s}}{4}\right) u_s. \quad (518)$$

В формулу (518) не вошел коэффициент  $C'''$  для сферической aberrации. Этот коэффициент не мог быть определен из поперечных aberrаций косо́го луча, лежавшего в сагиттальном сечении рассматриваемого наклонного пучка; для нахождения его необходимо иметь расчет хода косо́го луча, не лежащего в сагиттальной плоскости.

Для определения всех коэффициентов разложения aberrаций реального наклонного пучка лучей, составляющего конечный угол с осью системы, по апертурным углам до третьего порядка включительно, можно воспользоваться специальными формулами<sup>1</sup>, развернутыми в схемы для последовательного расчета через поверхности исследуемой системы (аналогично формулам для вычисления астigmatизма, дающим непосредственно значения коэффициентов  $A'_i$  и  $A'_s$ ).

<sup>1</sup> Об оценке качества изображения и коррекционных возможностей при расчете широкоугольных оптических систем, Докт. диссертация автора, 1940.

ОБРАЗОВАНИЕ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

§ 39. Оценка величины волновых aberrаций. Условие Рэлея.  
Критерий Штреля. Величина площади зрачка, удовлетворяющая условию Рэлея

Определение величин волновых aberrаций не является объективным критерием для оценки качества изображения, создаваемого рассматриваемым пучком лучей, хотя в ряде случаев знание величин волновых aberrаций способствует такой оценке.

Образование изображения приводит к некоторому перераспределению световой энергии, несомой рассматриваемым световым пучком, в плоскости, в которой воспринимается изображение. Для наиболее полной оценки качества изображения следовало бы выявить картину распределения световой энергии. Она может быть получена, с достаточной для практических целей точностью, как результат интерференции в каждой рассматриваемой точке плоскости изображения.

Рассеяние световой энергии в плоскости изображения называется дифракцией.

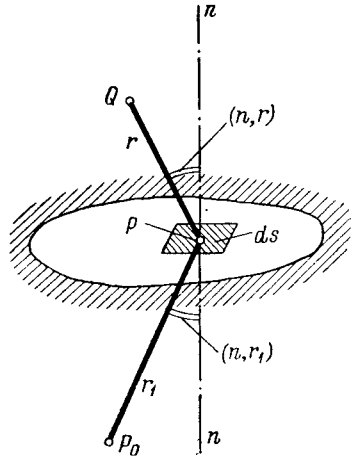
Дифракция зависит от величины волновых aberrаций, определяющих разности хода для всех интерферирующих между собой лучей, а также от формы отверстия, ограничивающего рассматриваемый пучок лучей.

Исходя из общей теории дифракции<sup>1</sup>, согласно принципу Гюйгенса, напишем выражение для светового возмущения  $U_0$  в некоторой произвольной точке  $P_0$  пространства (фиг. 90):

$$U_0 = \frac{A}{2\lambda} \cdot \frac{\cos(n,r) - \cos(n,r_1)}{rr_1} \int_S \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{r+r_1}{\lambda} \right) ds, \quad (519)$$

справедливое для случая малого отверстия произвольной формы.

В этой формуле  $T$  — период колебания;  $\lambda$  — длина волны;  $n, r$  и  $n, r_1$  — углы нормали к плоскости отверстия с направлениями к источнику света  $Q$  и рассматриваемой точке  $P_0$ . Величины  $r_1$  и  $r$  суть не что иное, как расстояния от источника света  $Q$  до некоторой точки отверстия  $P$  и от этой точки до рассматриваемой произвольной точки  $P_0$ .



Фиг. 90. Пример рассмотрения дифракции от отверстия.

<sup>1</sup> См., например, П. Друде, «Оптика», стр. 157, 1935.

Элементарную площадку дифрагирующего отверстия обозначим через  $ds$ ; роль коэффициента  $A$  выяснится в дальнейшем.

Полагая, что световая волна сходится к источнику света  $Q$  и этот источник расположен вблизи рассматриваемой точки  $P_0$ , можно приравнять друг другу расстояния  $r_1$  и  $r$ . Эти расстояния будут иметь разные знаки, и их сумма, входящая в выражение (519) под знаком синуса, выразит разность хода — волновую абберацию  $\varepsilon$  для некоторой точки дифрагирующего отверстия.

Полагая, что плоскость отверстия будет нормальной к рассматриваемым направлениям на источник света  $Q$  и точку  $P_0$ , можно приравнять единице величины косинусов, находящиеся в числителе дроби перед интегралом; так как знаки этих косинусов противоположны, то коэффициент, стоящий перед интегралом, упростится:

$$U_0 = \frac{A}{\lambda r^2} \int_S \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{\varepsilon}{\lambda} \right) ds. \quad (520)$$

Интегрирование будем производить по всей площади дифрагирующего отверстия  $S$ .

Развертывая выражение для синуса, стоящее под знаком интеграла, можно формулу (520) представить в следующем виде:

$$U_0 = \frac{A}{\lambda r^2} \left\{ \sin \frac{2\pi t}{T} \int_S \cos \frac{2\pi \varepsilon}{\lambda} ds + \cos \frac{2\pi t}{T} \int_S \sin \frac{2\pi \varepsilon}{\lambda} ds \right\}. \quad (521)$$

Обозначая величины

$$\frac{A}{\lambda r^2} = A'; \quad \int_S \cos \frac{2\pi \varepsilon}{\lambda} ds = C_0; \quad \int_S \sin \frac{2\pi \varepsilon}{\lambda} ds = S_0, \quad (522)$$

можно найти величину освещенности  $E$  в рассматриваемой точке  $P_0$ :

$$E = A'^2 (C_0^2 + S_0^2), \quad (523)$$

как квадрат амплитуды светового возмущения, определяемого формулой (521).

Возвратимся к формуле (520). Деля площадь  $ds$  элемента дифрагирующего отверстия на квадрат расстояния  $r$  до рассматриваемой точки  $P_0$ , образуем элементарный телесный угол  $d\Omega$ ; в этом случае надо выполнять интегрирование в пределах телесного угла с вершиной в рассматриваемой точке  $P_0$  и основанием, определяемым контуром дифрагирующего отверстия  $S$ . Можно написать:

$$U_0 = \frac{A}{\lambda} \int_{\Omega} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{\varepsilon}{\lambda} \right) d\Omega. \quad (524)$$

В формуле (524) световое возмущение  $U_0$  не зависит от расстояния между дифрагирующим отверстием и рассматриваемой точкой  $P_0$ ; отношение  $\frac{A}{\lambda}$  можно рассматривать как величину амплитуды, выраженную в длинах волн, равно как и волновую абберацию  $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ , также выраженную в длинах волн.

Развертывая формулу (524) аналогично формуле (520) и вводя соответственные обозначения

$$C = \int_{\Omega} \cos 2\pi \frac{\varepsilon}{\lambda} d\Omega; \quad S = \int_{\Omega} \sin 2\pi \frac{\varepsilon}{\lambda} d\Omega, \quad (525)$$

можно составить выражение для освещенности  $E$ :

$$E = \frac{A^2}{\lambda^2} (C^2 + S^2). \quad (526)$$

Величина волновой aberrации может быть представлена в виде функции от апертурных углов  $u_t$  и  $u_s$ ; в равной степени величина дифференциала  $d\Omega$  может быть представлена в виде произведения дифференциалов апертурных углов, а интегралы по площади, приведенные в формуле (525), должны быть преобразованы в двойные интегралы:

$$C = \int_{u_{t1}}^{u_{t2}} \int_{u_{s1}}^{u_{s2}} \cos 2\pi \frac{\varepsilon(u_t, u_s)}{\lambda} du_t du_s; \quad S = \int_{u_{t1}}^{u_{t2}} \int_{u_{s1}}^{u_{s2}} \sin 2\pi \frac{\varepsilon(u_t, u_s)}{\lambda} du_t du_s. \quad (527)$$

Величина волновой aberrации, как и дифференциал телесного угла  $d\Omega$ , может быть представлена и в системе полярных координат:

$$C = \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^u u \cos 2\pi \frac{\varepsilon(u, \gamma)}{\lambda} du; \quad S = \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^u u \sin 2\pi \frac{\varepsilon(u, \gamma)}{\lambda} du. \quad (528)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. Полагая величину волновой aberrации  $\varepsilon = 0$ , получаем  $\cos 2\pi \frac{\varepsilon}{\lambda}$  равным единице [см. формулу (525)], а  $\sin 2\pi \frac{\varepsilon}{\lambda}$  равным нулю; в силу этого формула (526) принимает следующий вид:

$$E_0 = \frac{A^2}{\lambda^2} C^2 = \frac{A^2}{\lambda^2} \left[ \int_{\Omega} d\Omega \right]^2 = \frac{A^2}{\lambda^2} \Omega^2, \quad (529)$$

т. е. величина освещенности в случае отсутствия волновой aberrации выражается произведением из квадрата амплитуды на квадрат телесного угла рассматриваемого пучка.

В частности, для пучка с сечением прямоугольной формы, находим:

$$E_0 = \frac{A^2}{\lambda^2} [4u_t u_s]^2 = 16 \frac{A^2}{\lambda^2} u_t^2 u_s^2 \quad (530)$$

и для пучка в виде кругового конуса

$$E_0 = \frac{A^2}{\lambda^2} [\pi u^2]^2 = \pi^2 \frac{A^2}{\lambda^2} u^4. \quad (531)$$

Определим величину освещенности при наличии некоторых aberrаций. Так, например, при наличии расфокусировки величина волновой aberrации  $\varepsilon$  выразится формулой

$$\varepsilon = A'u^2 = A'(u_t^2 + u_s^2). \quad (532)$$

Пользуясь выражениями для составляющих  $C$  и  $S$ , представленных в системе полярных координат [формула (528)], получим:

$$C = \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^u u \cos 2\pi \frac{A'u^2}{\lambda} du; \quad S = \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^u u \sin 2\pi \frac{A'u^2}{\lambda} du \quad (533)$$

и, выполняя интегрирование:

$$C = \frac{\lambda}{2A'} \sin 2\pi \frac{A'u^2}{\lambda}; \quad S = \frac{\lambda}{2A'} \left(1 - \cos 2\pi \frac{A'u^2}{\lambda}\right). \quad (534)$$

Подставляя полученные выражения для  $C$  и  $S$  в формулу (526), получим величину освещенности по формуле:

$$E_1 = \frac{A^2}{\lambda^2} \left\{ \left(\frac{\lambda}{2A'}\right)^2 \left[ \sin^2 2\pi \frac{A'u^2}{\lambda} + \left(1 - \cos 2\pi \frac{A'u^2}{\lambda}\right)^2 \right] \right\}. \quad (535)$$

Составляя отношение полученной величины освещенности при наличии расфокусировки к величине освещенности при отсутствии aberrаций, находим:

$$\frac{E_1}{E_0} = \left(\frac{\lambda}{2\pi A'u^2}\right)^2 \left[ \sin^2 2\pi \frac{A'u^2}{\lambda} + 1 - 2\cos 2\pi \frac{A'u^2}{\lambda} + \cos^2 2\pi \frac{A'u^2}{\lambda} \right]; \quad (536)$$

вводя после сокращений обозначение

$$z = \frac{2\pi A'u^2}{\lambda} = 2\pi \frac{\epsilon}{\lambda} = 2\pi\epsilon_\lambda; \quad (537)$$

окончательно получаем:

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{2}{z^2} (1 - \cos z). \quad (538)$$

Формула (538) дает отношение освещенности при наличии расфокусировки и при отсутствии каких-либо aberrаций, так называемое число Штреля или «определяющую яркость» для случая расфокусировки.

Величиной числа Штреля нередко пользуются как критерием для оценки совершенства изображения точки по отношению к изображению точки, создаваемому идеальным пучком, свободным от aberrаций.

Проследим изменение числа Штреля для различных значений аргумента  $z$  или для различных величин волновых aberrаций  $\epsilon_\lambda$  на краю круглого отверстия. Эти зависимости приведены в табл. 4.

Перейдем к рассмотрению случая наличия сферической aberrации. В этом случае величина волновой aberrации может быть выражена формулой

$$\frac{\epsilon}{\lambda} = \epsilon_\lambda = \frac{A'''}{\lambda} u^4. \quad (539)$$

Пользуясь формулой (539), преобразуем формулы (528). Получим

$$C = \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^u u \cos 2\pi \frac{A'''u^4}{\lambda} du; \quad S = \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^u u \sin 2\pi \frac{A'''u^4}{\lambda} du. \quad (540)$$

Таблица 4

$z$	$\varepsilon_\lambda$	$E_1 : E_0$
0,00 0,25π 0,50π 0,75π	0,000 0,125 0,250 0,375	1,00000 0,94966 0,81058 0,61499
π 1,25π 1,50π 1,75π	0,500 0,625 0,750 0,875	0,40529 0,22140 0,09006 0,01938
2π 2,25π 2,50π 2,75π	1,000 1,125 1,250 1,375	0,00000 <sup>1</sup> 0,01172 0,03242 0,04574
3π	1,500	0,04503

<sup>1</sup> Первый минимум.

Делая подстановку

$$z^2 = 4 \frac{A''' u^4}{\lambda} = \frac{4\varepsilon}{\lambda} = 4\varepsilon_\lambda, \quad (541)$$

можно формулы (540) привести к виду:

$$C = \frac{\pi u^3}{z} \int_0^z \cos \frac{\pi z^2}{2} dz; \quad S = \frac{\pi u^2}{z} \int_0^z \sin \frac{\pi z^2}{2} dz, \quad (542)$$

т. е. к так называемым интегралам Френеля. Пользуясь формулами (542), преобразуем выражение для освещенности изображения  $E$  [формула (526)]:

$$E = \frac{A^2}{\lambda^2} \left( \frac{\pi u^2}{z} \right)^2 \left[ \left( \int_0^z \cos \frac{\pi z^2}{2} dz \right)^2 + \left( \int_0^z \sin \frac{\pi z^2}{2} dz \right)^2 \right]. \quad (543)$$

Для полученное выражение на формулу для освещенности изображения при отсутствии aberrаций, находим величину числа Штреля для случая наличия сферической aberrации:

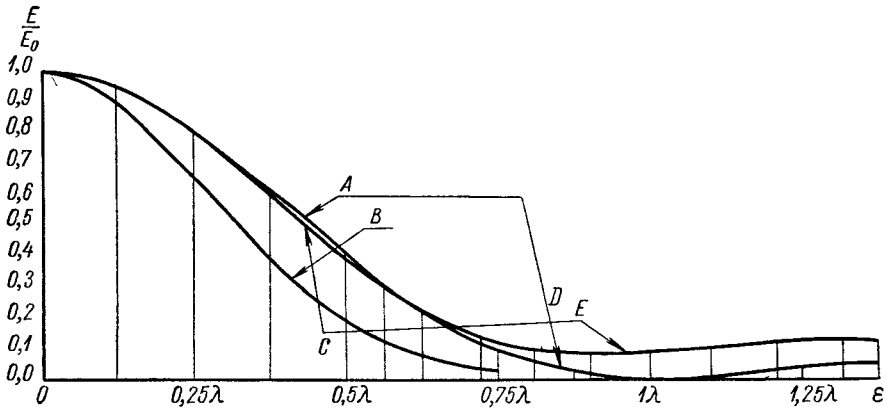
$$\frac{E}{E_0} = \frac{1}{z^2} \left[ \left( \int_0^z \cos \frac{\pi z^2}{2} dz \right)^2 + \left( \int_0^z \sin \frac{\pi z^2}{2} dz \right)^2 \right]. \quad (544)$$

Как и в случае расфокусировки, проследим изменение числа Штреля в зависимости от аргумента  $z$  или от величины волновой aberrации

$\epsilon_\lambda$  на краю отверстия. Зависимость между аргументом  $z$  и волновой aberrацией  $\epsilon_\lambda$ , согласно формуле (541), уже не будет, как в предыдущем случае, линейной; интегралы Френеля, как известно, не интегрируются в элементарных функциях, и для их вычисления воспользуемся специальными таблицами<sup>1</sup>.

Как и в случае расфокусировки, представим эти зависимости в форме таблицы (табл. 5).

Из сопоставления табл. 4 и 5 видно, что в области малых значений волновых aberrаций (до значений  $\epsilon_\lambda = 0,5$ ) оба значения чисел Штреля



Фиг. 91. Графики изменения чисел Штреля.

совпадают друг с другом. Небезынтересно отметить, что кривая чисел Штреля для случая сферической aberrации располагается несколько (хотя и очень незначительно) ниже, нежели кривая чисел Штреля при расфокусировке; это объясняется тем, что для случая сферической aberrации первый минимум наступает несколько раньше, чем при расфокусировке. Обе зависимости графически даны на фиг. 91 (кривая AD для случая расфокусировки, кривая CE для случая сферической aberrации).

Для значений  $\epsilon$  меньших, нежели  $0,25\lambda$ , величина чисел Штреля в обоих случаях сравнительно мало отличается от единицы (числа Штреля в этом случае достигают величины 0,8 и более). Это послужило основанием для того, чтобы считать оптические системы с волновыми aberrациями, не превосходящими  $0,25\lambda$ , физически мало отличающимися от оптических систем, полностью свободных от aberrаций; это условие ограничения величин волновых aberrаций величиной четверти длины волны принято называть условием Рэлея.

Соблюдение условия Рэлея гарантирует высокое качество изображения, мало отличающееся от идеально возможного.

Ни критерий Штреля, ни условие Рэлея не дают возможности получить исчерпывающую оценку качества изображения; наоборот,

<sup>1</sup> См. Я. Н. Ш п и л ь р е й н, Таблицы специальных функций, ГТТИ, 1933, ч. I, стр. 18.



Таблица 5

$z$	$\varepsilon_\lambda$	$E : E_0$
0,0	0,0000	1,00000
0,1	0,0025	0,99995
0,2	0,0100	0,99942
0,3	0,0225	0,99891
0,4	0,0400	0,99452
0,5	0,0625	0,98622
0,6	0,0900	0,97162
0,7	0,1225	0,94863
0,8	0,1600	0,91388
0,9	0,2025	0,86468
1,0	0,2500	0,80034
1,1	0,3025	0,72129
1,2	0,3600	0,62531
1,3	0,4225	0,52001
1,4	0,4900	0,41015
1,5	0,5625	0,30435
1,6	0,6400	0,21133
1,7	0,7225	0,14069
1,8	0,8100	0,09766
1,9	0,9025	0,08173 <sup>1</sup>
2,0	1,0000	0,08909
2,1	1,1025	0,10842
2,2	1,2100	0,12652
2,3	1,3225	0,13197
2,4	1,4400	0,12019
2,5	1,5025	0,09482
2,6	1,6900	0,06712
2,7	1,8225	0,04928
2,8	1,9600	0,04743 <sup>2</sup>
2,9	2,1025	0,05762
3,0	2,2500	0,06813

<sup>1</sup> Первый минимум.<sup>2</sup> Второй минимум.

только что рассмотренные примеры показывают, что критерий Штреля и условие Рэлея дают совпадающие друг с другом результаты, хотя изображение в случае расфокусировки будет несколько хуже, чем в случае наличия сферической аберрации.

Несмотря на это, рассмотрим еще один случай определения числа Штреля при наличии астигматизма, когда точка, в которой оценивается качество изображения, расположена посередине между обоими астигматическими фокусами. Для этого случая волновая аберрация  $\epsilon$  может быть представлена в следующем виде:

$$\epsilon = A'_i u_i^2 + A'_s u_s^2 = A' u_i^2 - A' u_s^2 \quad (545)$$

или, прибегая к полярной системе координат,

$$\epsilon = A' u^2 (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) = A' u^2 \cos 2\gamma. \quad (546)$$

Переходя к общим формулам для освещенности изображения, формулы (528) представим в виде:

$$C = \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^u u \cos \left( \frac{2\pi A' u^2}{\lambda} \cos 2\gamma \right) du; \quad (547)$$

$$S = \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^u u \sin \left( \frac{2\pi A' u^2}{\lambda} \cos 2\gamma \right) du.$$

Делая подстановки:

$$\theta = 2\gamma, \quad z = 2\pi \frac{A' u^2}{\lambda} = 2\pi \epsilon_\lambda \quad (548)$$

и изменяя пределы интегрирования в формуле для  $C$ :

$$C = \frac{1}{2} \int_0^u u du \int_0^{4\pi} \cos \left( 2\pi \frac{A' u^2}{\lambda} \cos \theta \right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^u u du 4 \int_0^\pi \cos \left( 2\pi \frac{A' u^2}{\lambda} \cos \theta \right) d\theta, \quad (549)$$

можно привести интеграл  $C$  к интегралу от бесселевой функции первого рода нулевого порядка:

$$C = \frac{\lambda}{2\pi A'} \int_0^z dz \int_0^\pi \cos(z \cos \theta) d\theta = \frac{\lambda}{2A'} \int_0^z I_0(z) dz; \quad (550)$$

интеграл же  $S$  будет тождественно равным нулю, так как подынтегральная функция располагается симметрично относительно оси  $\theta$  и образует равные площади по обе стороны от оси в пределах интегрирования.

На основании формул (550) и (526), находим величину освещенности  $E$ :

$$E = \frac{A^2}{\lambda^2} \left\{ \left( \frac{\lambda}{2A'} \right)^2 \left( \int_0^z I_0(z) dz \right)^2 \right\} \quad (551)$$

и, деля величину  $E$ , определяемую формулой (551), на величину освещенности  $E_0$  для случая отсутствия aberrаций, получим величину определяющей яркости (значения критерия Штреля):

$$\frac{E}{E_0} = \left( \frac{\lambda}{2\pi A' u^2} \right)^2 \left( \int_0^z I_0(z) dz \right)^2 = \left[ \frac{1}{z} \int_0^z I_0(z) dz \right]^2. \quad (552)$$

Интеграл от Бесселевой функции нулевого порядка не приводится к какой-либо известной функции; поэтому придется прибегнуть к приближенному интегрированию путем разворачивания подынтегральной функции в ряд по степеням аргумента  $z$  и к последующему почленному интегрированию. Для Бесселевой функции нулевого порядка имеем следующий ряд:

$$I_0(z) = 1 - \frac{z^2}{2^2 \cdot (1!)^2} + \frac{z^4}{2^4 \cdot (2!)^2} - \frac{z^6}{2^6 \cdot (3!)^2} + \dots \quad (553)^1$$

Интегрируя формулу (553) почленно и деля полученное выражение на величину  $z$ , получим:

$$\frac{1}{z} \int_0^z I_0(z) dz = 1 - \frac{z^2}{3 \cdot 2^2 \cdot (1!)^2} + \frac{z^4}{5 \cdot 2^4 \cdot (2!)^2} - \frac{z^6}{7 \cdot 2^6 \cdot (3!)^2} + \dots \quad (554)$$

Формула (554) дает возможность вычислить ряд значений чисел Штреля при различных значениях волновых aberrаций. Эти зависимости даны в табл. 6.

Таблица 6

$z$	$\epsilon_\lambda$	$E : E_0$
0,00	0,000	1,00000
0,25 $\pi$	0,125	0,90208
0,50 $\pi$	0,250	0,66011
0,75 $\pi$	0,375	0,38908
$\pi$	0,500	0,18397
1,25 $\pi$	0,625	0,07203
1,50 $\pi$	0,750	0,02735

Для вычисления приведенной таблицы потребовалось для сохранения правильности 5-го знака после запятой воспользоваться 7 членами разложения в формуле (554).

Зависимость чисел Штреля от  $\epsilon_\lambda$  (см. табл. 6) показана на фиг. 91 (линия  $B$ ).

Сопоставляя эту кривую с двумя предшествующими, нетрудно установить, что для нее значения чисел Штреля принимают несколько меньшие значения, нежели в двух предыдущих случаях, несмотря на то, что во всех трех случаях условие Рэлея соблюдено

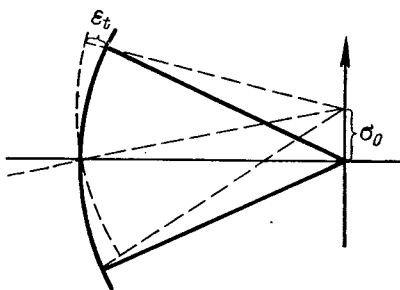
<sup>1</sup> См. Я. Н. Шпильрейи, Таблицы специальных функций, ч. I, стр. 42.

в равной степени. Это лишний раз подтверждает, что ни число Штреля, ни условие Рэлея не позволяют получить исчерпывающего суждения о качестве изображения при наличии различных aberrаций.

### § 40. Распределение световой энергии в изображении точки в простейших случаях

Наиболее полное суждение о качестве изображения может быть получено тогда, когда известна картина распределения световой энергии в изображении точки в зависимости от наличия в рассматриваемом пучке лучей тех или иных aberrаций.

Решение этой задачи весьма затруднительно; поэтому следует ограничиться рассмотрением ряда частных случаев, позволяющих все же получить более или менее полное представление о тех явлениях, которые имеют место при наличии наиболее характерных aberrаций в пучке.



Фиг. 92. Поворот сферы сравнения.

Рассмотрим пучок, свободный от aberrаций. Помещая центр сферы сравнения в центр сходящейся волновой поверхности, получаем полное отсутствие волновой aberrации; величина освещенности для этого случая уже была определена [формула (531)].

При перемещении центра сферы сравнения в направлении, перпендикулярном оси пучка (фиг. 92), нарушается равенство расстояний от различных точек волновой поверхности до рассматриваемой точки; иными словами, вносим некоторую волновую aberrацию.

Величина волновой aberrации связана линейной зависимостью с величиной меридионального апертурного угла; полагая смещение центра сферы сравнения равным  $\sigma_0$ , можно написать:

$$\epsilon_t = \sigma_0 u_t. \quad (555)$$

При обходе по круговому контуру величина коэффициента при апертурном угле  $u$  будет изменяться; это изменение может быть представлено зависимостью

$$\epsilon = \sigma_0 u \cos \gamma. \quad (556)$$

Пользуясь формулами (555) и (556), можно преобразовать выражение для освещенности  $E$ :

$$E = \frac{A^2}{\lambda^2} C^2 = \frac{A^2}{\lambda^2} \left[ \int_0^u u du \int_0^{2\pi} \cos \left( 2\pi \frac{\sigma_0 \cos \gamma}{\lambda} u \right) d\gamma \right]^2 \quad (557)$$

(интеграл  $S$  опускается, как тождественно равный нулю).

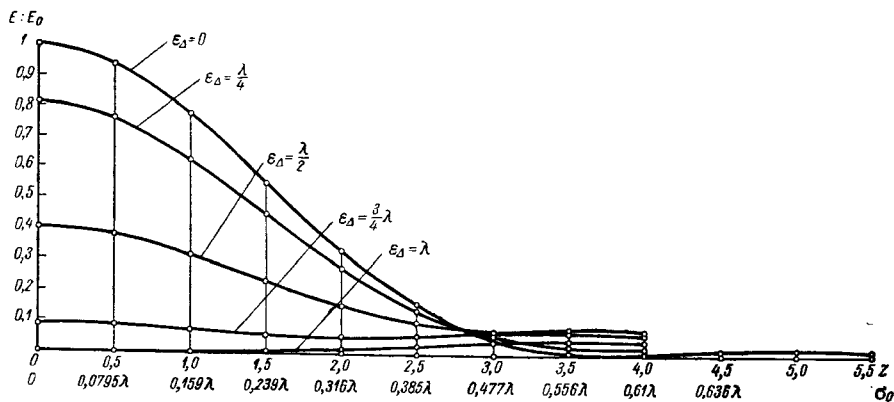
Пользуясь подстановкой новой переменной  $z$ , можно привести интеграл  $C$  к следующему виду:

$$C = \left( \frac{\lambda}{2\pi\sigma_0} \right)^2 \int_0^z z dz \int_0^{2\pi} \cos(z \cos \gamma) d\gamma, \quad (558)$$

где

$$z = 2\pi \frac{\sigma_0}{\lambda} u; \quad u = \frac{\lambda}{2\pi\sigma_0} z; \quad du = \frac{\lambda}{2\pi\sigma_0} dz. \quad (559)$$

Изменяя верхний предел интегрирования во втором интеграле, можно двойной интеграл  $C$  выразить через интеграл от произведения



Фиг. 93. Распределение энергии в кружке рассеяния при различных расфокусировках.

Бесселевой функции нулевого порядка на ее аргумент:

$$C = \left( \frac{\lambda}{2\pi\sigma_0} \right)^2 \int_0^z z dz 2 \int_0^\pi \cos(z \cos \gamma) d\gamma = \left( \frac{\lambda}{2\pi\sigma_0} \right)^2 2\pi \int_0^z z I_0(z) dz; \quad (560)$$

этот интеграл приводится, как известно, к произведению Бесселевой функции первого рода первого порядка на ее аргумент:

$$C = \left( \frac{\lambda}{2\pi\sigma_0} \right)^2 2\pi z I_1(z). \quad (561)$$

Пользуясь формулами (559), можно представить формулу (561) в следующем виде:

$$C = 2\pi u^2 \frac{I_1(z)}{z}. \quad (562)$$

Деля квадрат выражения (562) на формулу для освещенности изображения в случае отсутствия аберраций [формула (531)], находим:

$$\frac{E}{E_0} = \frac{C^2}{\pi^2 u^4} = \left| \frac{2I_1(z)}{z} \right|^2. \quad (563)$$

Формула (563) показывает, что распределение освещенности в изображении точки при отсутствии аберраций определяется квадратом

отношения удвоенной Бесселевой функции первого рода первого порядка к ее аргументу.

Эта зависимость дана в табл. 7.

Графически зависимость распределения энергии в изображении точки, выраженная формулой (563), как функция от аргумента  $z$ , приведена на фиг. 93 ( $\varepsilon_\Delta = 0$ ).

Величина  $z = 3,83$ , определяющая первый минимум, ограничивает область центрального пятна в изображении точки, несущем в себе 83,8% всей световой энергии, приносимой пучком, свободным от аберраций.

Перейдем к рассмотрению более общего случая распределения световой энергии в пространстве, предполагая, как и ранее, что рассматриваемый пучок лучей свободен от аберраций.

Обратимся к исходным выражениям для интегралов  $C$  и  $S$  [формулы (528)]. Разбивая волновую аберрацию на две составляющих  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , можно выражения  $C$  и  $S$  представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} C &= \int_0^u u du \int_0^{2\pi} \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \right) d\gamma \\ S &= \int_0^u u du \int_0^{2\pi} \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \right) d\gamma \end{aligned} \right\} \quad (564)$$

или, развертывая под обоими интегралами синус и косинус:

$$\left. \begin{aligned} C &= \int_0^u u du \int_0^{2\pi} \cos \frac{2\pi}{\lambda} \varepsilon_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda} \varepsilon_2 d\gamma - \int_0^u u du \int_0^{2\pi} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \varepsilon_1 \sin \frac{2\pi}{\lambda} \varepsilon_2 d\gamma \\ S &= \int_0^u u du \int_0^{2\pi} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \varepsilon_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda} \varepsilon_2 d\gamma + \int_0^u u du \int_0^{2\pi} \cos \frac{2\pi}{\lambda} \varepsilon_1 \sin \frac{2\pi}{\lambda} \varepsilon_2 d\gamma \end{aligned} \right\} \quad (565)$$

Если за одну из составляющих волновой аберрации принять расфокусировку, а за другую составляющую — перемещение точки в плоскости наводки, что может быть выражено формулами

$$\varepsilon_1 = A'u^2; \quad \varepsilon_2 = A_0 u \cos \gamma, \quad (566)$$

то интегралы  $C$  и  $S$  будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} C &= \int_0^u u \cos \frac{2\pi}{\lambda} A'u^2 du \int_0^{2\pi} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} A_0 u \cos \gamma \right] d\gamma - \\ &\quad - \int_0^u u \sin \frac{2\pi}{\lambda} A'u^2 du \int_0^{2\pi} \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} A_0 u \cos \gamma \right] d\gamma \\ S &= \int_0^u u \sin \frac{2\pi}{\lambda} A'u^2 du \int_0^{2\pi} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} A_0 u \cos \gamma \right] d\gamma + \\ &\quad + \int_0^u u \cos \frac{2\pi}{\lambda} A'u^2 du \int_0^{2\pi} \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} A_0 u \cos \gamma \right] d\gamma \end{aligned} \right\} \quad (567)$$

Таблица 7

$z$	$E : E_0$	$z$	$E : E_0$	$z$	$E : E_0$
0,1	0,99760	2,5	0,15814	4,9	0,01650
0,2	0,99000	2,6	0,13117	5,0	0,01717
0,3	0,97773	2,7	0,10676	5,1	0,01748
0,4	0,96068	2,8	0,08564	5,2	0,01743
0,5	0,93913	2,9	0,06704	5,3	0,01704
0,6	0,91332	3,0	0,05110	5,4	0,01636
0,7	0,88360	3,1	0,03769	5,5	0,01506
0,8	0,85028	3,2	0,02668	5,6	0,01427
0,9	0,81384	3,3	0,01788	5,7	0,01294
1,0	0,77457	3,4	0,01112	5,8	0,01150
1,1	0,73307	3,5	0,00616	5,9	0,01001
1,2	0,68970	3,6	0,00281	6,0	0,00851
1,3	0,64500	3,7	0,00085	6,1	0,00704
1,4	0,59941	3,8	0,00004	6,2	0,00565
1,5	0,55343	3,9	0,00020	6,3	0,00436
1,6	0,50737	4,0	0,00109	6,4	0,00322
1,7	0,46204	4,1	0,00254	6,5	0,00224
1,8	0,41748	4,2	0,00436	6,6	0,00143
1,9	0,37425	4,3	0,00639	6,7	0,00081
2,0	0,33262	4,4	0,00850	6,8	0,00037
2,1	0,29293	4,5	0,01055	6,9	0,00010
2,2	0,25545	4,6	0,01245	7,0	0,00000
2,3	0,22038	4,7	0,01410	7,1	0,00005
2,4	0,18791	4,8	0,01547	7,2	0,00023

Интегралы в обоих выражениях для  $C$  и  $S$ , содержащие  $\sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} A_0 u \cos \gamma \right]$  в пределах интегрирования от 0 до  $2\pi$ , тождественно обращаются в нуль; поэтому формула (567) может быть представлена в виде:

$$\left. \begin{aligned} C &= \int_0^u u \cos \frac{2\pi}{\lambda} A' u^2 du \int_0^{2\pi} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} A_0 u \cos \gamma \right] d\gamma \\ S &= \int_0^u u \sin \frac{2\pi}{\lambda} A' u^2 du \int_0^{2\pi} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} A_0 u \cos \gamma \right] d\gamma \end{aligned} \right\} \quad (568)$$

Пользуясь подстановками:

$$z = \frac{2\pi}{\lambda} A_0 u; \quad u = \frac{z\lambda}{2\pi A_0}; \quad du = \frac{\lambda}{2\pi A_0} dz, \quad (569)$$

можно интегралы выразить в виде интегралов от Бесселевых функций нулевого порядка, умноженных соответственно на косинус или на синус  $\frac{2\pi}{\lambda} A' u^2$ .

Эти интегралы примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} C &= \pi \int_0^u \cos \frac{2\pi}{\lambda} A' u^2 du^2 \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \cos \gamma) d\gamma = \\ &= \pi \int_0^u I_0(z) \cos \frac{2\pi}{\lambda} A' u^2 du^2 \\ S &= \pi \int_0^u \sin \frac{2\pi}{\lambda} A' u^2 du^2 \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \cos \gamma) d\gamma = \\ &= \pi \int_0^u I_0(z) \sin \frac{2\pi}{\lambda} A' u^2 du^2 \end{aligned} \right\} \quad (570)$$

Обозначив коэффициенты при переменных в Бесселевых функциях и под знаками косинуса и синуса соответственно через  $a$  и  $b$ , получим:

$$C = \frac{\pi}{a} \int_0^u I_0(bu) \cos au^2 d(au)^2; \quad S = \frac{\pi}{a} \int_0^u I_0(bu) \sin au^2 d(au)^2. \quad (571)$$

Эти интегралы не могут быть выражены в элементарных функциях; поэтому придется прибегнуть к какому-либо способу приближенного интегрирования; в частности, можно воспользоваться разложением Бесселевых функций, находящихся под знаком интеграла, в ряды по



степеням переменной с последующим почленным интегрированием. Вводя для удобства, новую переменную  $x$ , можно написать:

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{\pi}{a} \int_0^u \left( 1 - \frac{b^2 x}{a^2 2^2 (1!)^2} + \frac{b^4 x^3}{a^3 2^4 (2!)^2} - \frac{b^6 x^5}{a^5 2^6 (3!)^2} + \frac{b^8 x^7}{a^4 2^8 (4!)^2} - \dots \right) \cos x \, dx \\ S &= \frac{\pi}{a} \int_0^u \left( 1 - \frac{b^2 x}{a^2 2^2 (1!)^2} + \frac{b^4 x^3}{a^3 2^4 (2!)^2} - \frac{b^6 x^5}{a^5 2^6 (3!)^2} + \frac{b^8 x^7}{a^4 2^8 (4!)^2} - \dots \right) \sin x \, dx \end{aligned} \right\} (572)$$

где

$$x = au^2; \quad u = \sqrt{\frac{a}{x}}. \quad (573)$$

Почленное интегрирование выражений (572) дает

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{\pi}{a} \left\{ \sin au^2 - \frac{b^2 u^3}{2^2 (1!)^2} \left[ \sin au^2 + \frac{\cos au^2 - 1}{au^2} \right] + \right. \\ &\quad + \frac{b^4 u^4}{2^4 (2!)^2} \left[ \sin au^2 + \frac{2 \cos au^2}{au^2} - \frac{2 \sin au^2}{a^2 u^4} \right] - \frac{b^6 u^6}{2^6 (3!)^2} \left[ \sin au^2 + \right. \\ &\quad + \frac{3}{au^2} \cos au^2 - \frac{6}{a^2 u^4} \sin au^2 - \frac{6}{a^3 u^6} (\cos au^2 - 1) \left. \right] + \\ &\quad + \frac{b^8 u^8}{2^8 (4!)^2} \left[ \sin au^2 + \frac{4}{au^2} \cos au^2 - \frac{12}{a^2 u^4} \sin au^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{24}{a^3 u^6} \cos au^2 + \frac{24}{a^4 u^8} \sin au^2 \right] - \dots \left. \right\} \\ S &= \frac{\pi}{a} \left\{ -\cos au^2 + 1 - \frac{b^2 u^3}{2^2 (1!)^2} \left[ -\cos au^2 + \frac{\sin au^2}{au^2} \right] + \right. \\ &\quad + \frac{b^4 u^4}{2^4 (2!)^2} \left[ -\cos au^2 + \frac{2}{au^2} \sin au^2 + \frac{2}{a^2 u^4} (\cos au^2 - 1) \right] - \\ &\quad - \frac{b^6 u^6}{2^6 (3!)^2} \left[ -\cos au^2 + \frac{3}{au^2} \sin au^2 + \frac{6}{a^2 u^4} \cos au^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{6}{a^3 u^6} \sin au^2 \right] + \frac{b^8 u^8}{2^8 (4!)^2} \left[ -\cos au^2 + \frac{4}{au^2} \sin au^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{12}{a^2 u^4} \cos au^2 - \frac{24}{a^3 u^6} \sin au^2 - \frac{24}{a^4 u^8} (\cos au^2 - 1) \right] - \dots \left. \right\} \end{aligned} \right\} (574)$$

Пользуясь формулами (574), можно вычислить распределение энергии в изображении точки при различных расфокусировках. Так, задаваясь расфокусировками, создающими на краю отверстия волновую aberrацию, равную соответственно  $\frac{\lambda}{4}$ ,  $\frac{\lambda}{2}$ ,  $\frac{3\lambda}{4}$  и  $\lambda$ , получаем картину распределения энергии, представленную в табл. 8.

Графически распределение энергии в изображении точки при различных расфокусировках показано на фиг. 93.

При расфокусировке, создающей на краю отверстия волновую aberrацию, равную  $\lambda$ , получаем распределение энергии в виде кольца с темным пятном на оси пучка.

z	E : E <sub>0</sub>				
	$\epsilon_{\Delta} = 0$	$\epsilon_{\Delta} = \frac{\lambda}{4}$	$\epsilon_{\Delta} = \frac{\lambda}{2}$	$\epsilon_{\Delta} = \frac{3}{4} \lambda$	$\epsilon_{\Delta} = \lambda$
0	1,00000	0,81058	0,40529	0,09006	0,00000
0,5	0,93913	0,76127	0,38073	0,08473	0,00010
1,0	0,77457	0,62850	0,31581	0,07196	0,00140
1,5	0,55343	0,45158	0,23449	0,05940	0,00603
2,0	0,33262	0,27724	0,15584	0,05436	0,01523
2,5	0,15814	0,14241	0,10309	0,05923	0,02769
3,0	0,05110	0,06237	0,07779	0,07007	0,03972
3,5	0,00616	0,03045	0,07340	0,08152	0,04818
4,0	0,00109	0,02400	0,06428	0,07706	0,04761

#### § 41. Распределение энергии в изображении точки в случае астигматизма

Вычисление распределения энергии в изображении точки при наличии тех или иных aberrаций еще более усложняется; в связи с этим ограничимся рассмотрением вопроса о распределении энергии лишь для частного случая астигматизма, когда изображение рассматривается в одном из астигматических фокусов.

Волновые поверхности для этого случая, когда рассматриваемая точка лежит на оси пучка, принимают форму параболического цилиндра: кривые равных волновых aberrаций представляют собой систему параллельных прямых (фиг. 94).

Вычисление величины освещенности для точки, лежащей на оси пучка лучей, можно осуществить, пользуясь приближенным интегрированием с помощью формулы Симпсона. Для этого можно разбить сагиттальный апертурный угол на ряд интервалов, например на 10; затем для каждого из значений сагиттального апертурного угла с помощью формулы

$$u_t = \sqrt{1 - u_s^2} \quad (575)$$

можно вычислить меридиональные апертурные углы  $u_t$ , соответствующие контуру зрачка.

Величина волновой aberrации определится формулой

$$\epsilon_{\lambda} = A'_s u_s^2. \quad (576)$$

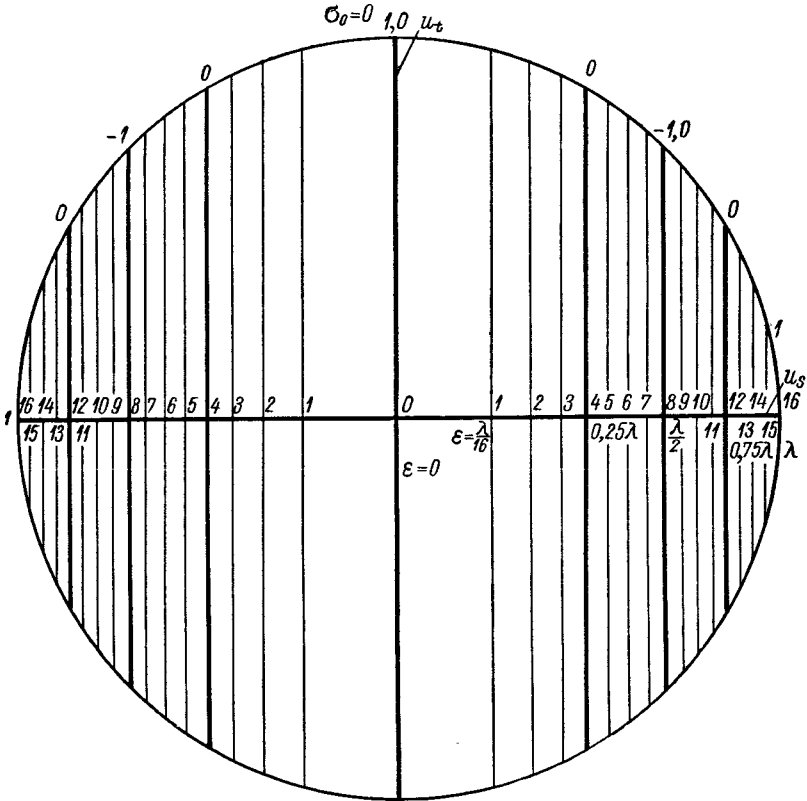
Пользуясь этой формулой, можно для каждого из значений сагиттального апертурного угла найти элементарные пути колеблющейся точки:

$$\left. \begin{aligned} C &= \cos 2\pi \epsilon_{\lambda} = \cos 2\pi A'_s u_s^2 \\ S &= \sin 2\pi \epsilon_{\lambda} = \sin 2\pi A'_s u_s^2 \end{aligned} \right\} \quad (577)$$

и с помощью формулы Симпсона

$$I \approx \frac{4h}{3} (f_1 + f_3 + \dots + f_{2m-1}) + \frac{2h}{3} (f_2 + f_4 + \dots + f_{2m-2}) + \frac{h}{3} (f_0 + f_{2m}) \quad (578)$$

могут быть вычислены интегралы  $C$  и  $S$ , суммой квадратов которых и определяется величина освещенности  $E$ .



Фиг. 94. Волновые aberrации для случая астигматизма при расположении центра сферы сравнения на главном луче.

Так как величина волновой aberrации не зависит от апертурного угла  $u_i$ , то величины  $f$ , входящие в формулу (578), должны быть прямо пропорциональны величинам апертурных углов  $u_i$  (интегрирование величин  $C$  и  $S$  производится сначала вдоль направлений, параллельных оси  $u_i$ ), т. е.

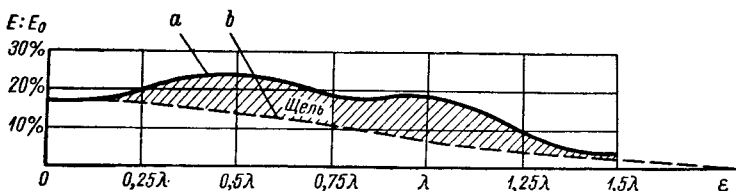
$$\left. \begin{aligned} f_{ic} &= u_{i,i} \cos 2\pi\epsilon (u_{si}) \\ f_{is} &= u_{i,i} \sin 2\pi\epsilon (u_{si}) \end{aligned} \right\} \quad (578a)$$

Перейдем к рассмотрению изменения освещенности для случая, когда точка, в которой определяется освещенность, перемещается в направлении, перпендикулярном линии нулевой волновой aberrации ( $e = 0$ ).

Для этого случая линии равных волновых aberrаций останутся прямыми, параллельными друг другу и своему прежнему направлению; уравнение же волновой aberrации примет следующий вид:

$$\epsilon_{\lambda} = A'_s u_s^2 + A_s u_s. \quad (579)$$

Это позволяет воспользоваться для вычисления интегралов  $C$  и  $S$  только что рассмотренным приемом, с той лишь разницей, что в фор-



Фиг. 95. Изменение освещенности в изображении точки (при наличии астигматизма) в направлении, перпендикулярном линии «нулевой» волновой aberrации ( $e = 0$ ):

$a$  — для круглого зрачка при наличии астигматизма;  $b$  — для щели при отсутствии aberrации.

мулах (577) придется в аргументе для синуса и косинуса добавить член, вошедший в формулу (579) в связи со смещением рассматриваемой точки с оси пучка.

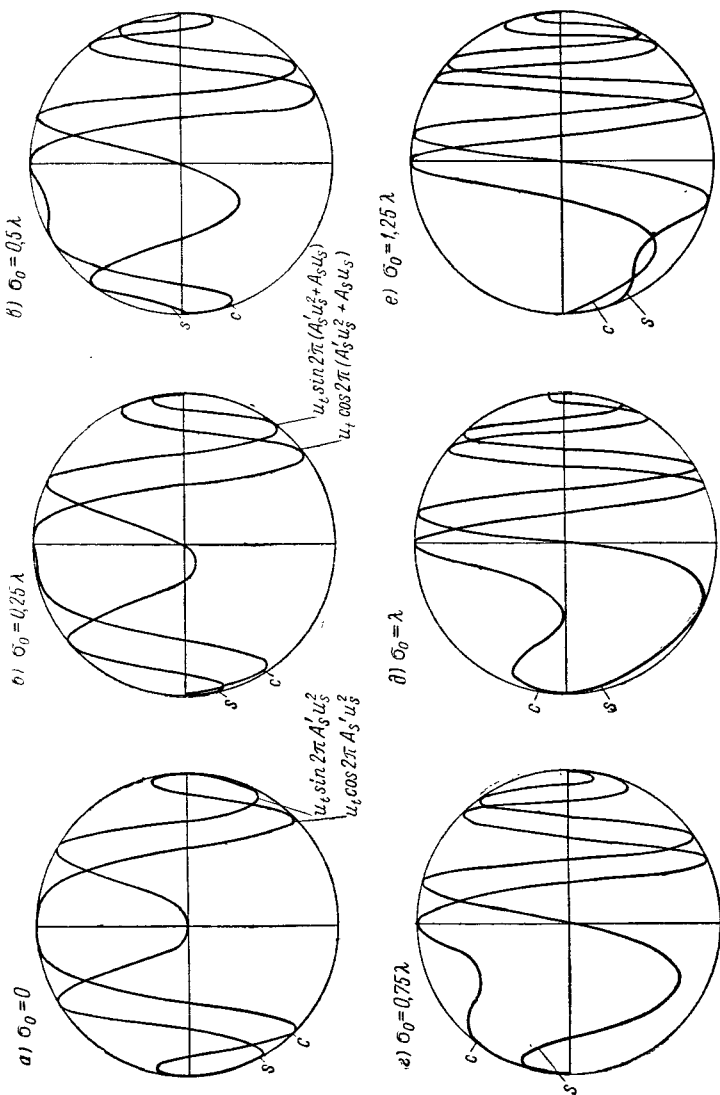
Изменяя в формуле (579) значение коэффициента у члена, содержащего сагиттальный апертурный угол  $u_s$  в первой степени, можно вычислить освещенность  $E$  в точках, лежащих на разных расстояниях от оси пучка.

Это изменение линейного коэффициента  $A_s$  вызывает изменение волновых aberrаций на площади зрачка, тождественное поступательному перемещению самого отверстия в направлении оси  $u_s$  при сохранении волновых aberrаций неизменными.

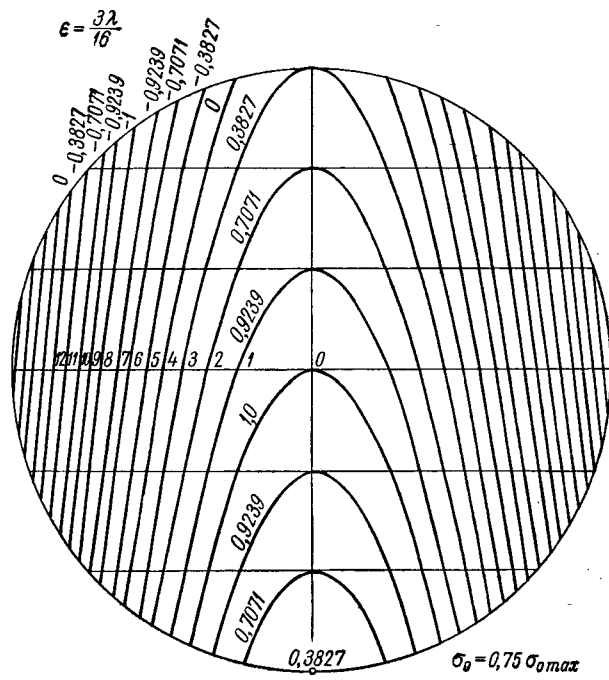
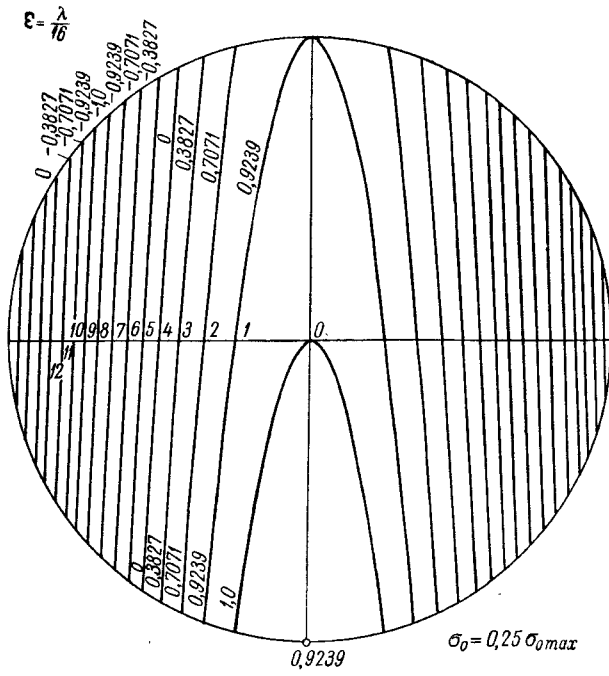
Для частного случая, когда величина астигматизма достигает одной волны и когда смещение с оси пучка изменяет на краю отверстия волновую aberrацию также на одну волну, картина изменения освещенности приведена на фиг. 95. (В дальнейшем эта картина сопоставляется с изменением освещенности — пунктирная кривая — для прямоугольной щели с шириной, обеспечивающей равную освещенность в центре пятна при длине щели, равной диаметру зрачка.)

Распределение линий равных волновых aberrаций для точки, лежащей на оси пучка, дано на фиг. 94; на фиг. 96,  $a—e$  показано последовательное изменение интегрируемых функций  $f$  [см. формулу (578)] по мере удаления от оси пучка в направлении, перпендикулярном направлению линий равных волновых aberrаций.

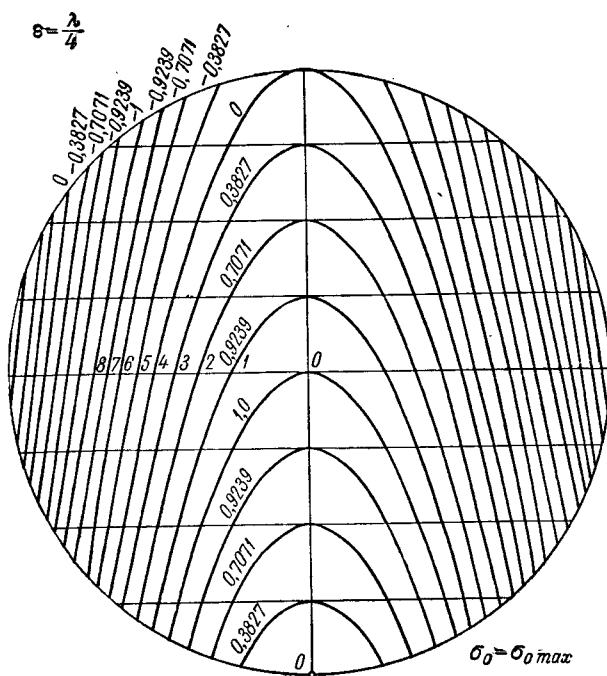
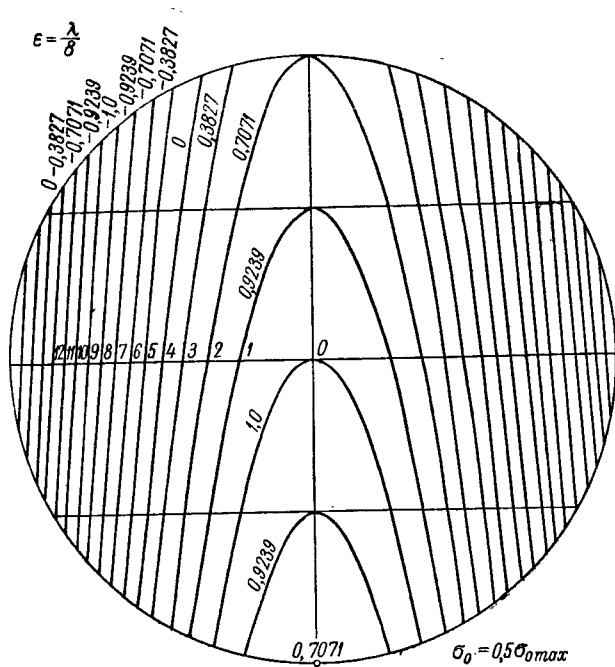
Зависимость изменения освещенности, показанная на фиг. 95, приведена в табл. 9.



Фиг. 96. Картины изменения составляющих  $S$  и  $C$  для интегралов, определяющих распределение освещенности в изображении точки, при смещении центра сферы сравнения в направлении, перпендикулярном линии нулевой волновой aberrации.



Фиг. 97. Картины волновых aberrаций при смещении «нулевой» волно



центра сферы сравнения с главного луча вдоль линии  
вой aberrации.

$\epsilon$	0	0,25 $\lambda$	0,5 $\lambda$	0,75 $\lambda$	$\lambda$	1,25 $\lambda$	1,5 $\lambda$
$E : E_0$	0,1702	0,20004	0,23758	0,18595	0,18624	0,0936	0,04557

Перейдем к рассмотрению изменения освещенности в перпендикулярном направлении. В этом случае кривые равных волновых aberrаций уже не будут представлять собой семейство параллельных прямых; они превратятся в семейство парабол, параметр которых будет изменяться в связи с удалением от оси пучка. Эти семейства парабол показаны на фиг. 97. Численное интегрирование световых возмущений можно также осуществить с помощью формулы Симпсона, прибегнув для упрощения вычислений к искусственному спрямлению кривых равных волновых aberrаций путем соответственного деформирования контура зрачка. Подобное деформирование контура зрачка может быть осуществлено посредством суммирования меридиональных ординат кругового зрачка с меридиональными ординатами кривых равных волновых aberrаций; таким образом можно получить уравнение контура деформированного зрачка:

$$u_t = -\frac{u_s^2}{2a} \pm \sqrt{1 - u_s^2}. \quad (580)$$

Коэффициент  $a$  представляет собой параметр спрямляемых парабол равных волновых aberrаций. Рассматривая уравнение параболы, равной волновой aberrации, проходящей, например, через начало координат,

$$\epsilon = 0 = A_s' u_s^2 + A_t u_t \quad (581)$$

и представляя его в виде

$$u_s^2 = -\frac{A_t'}{A_s'} u_t = 2a u_t, \quad (582)$$

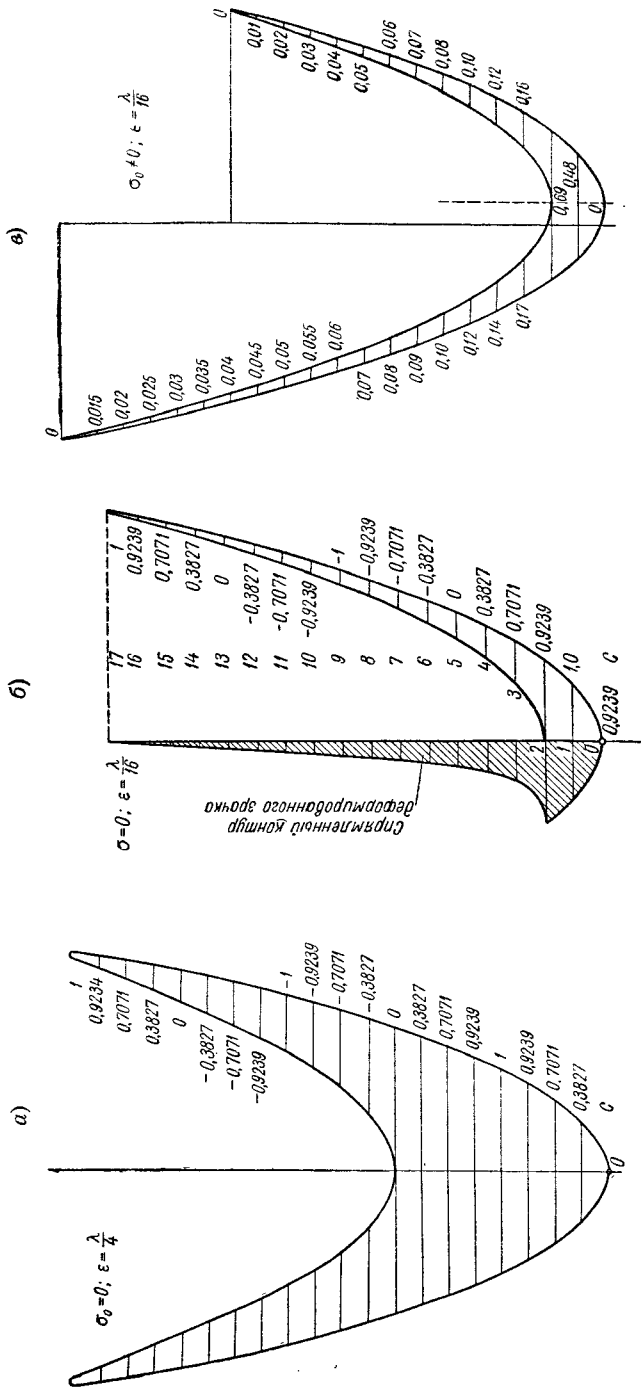
можно определить значение коэффициента  $a$ .

Однако уравнением (580) значительно удобнее пользоваться, решив его относительно апертурного угла  $u_s$ ; при этом уравнение контура зрачка получает следующий вид:

$$u_s = \pm \sqrt{2a} \sqrt{-u_t - a \pm \sqrt{2a} \sqrt{u_t + \frac{a}{2} + \frac{1}{2a}}}. \quad (583)$$

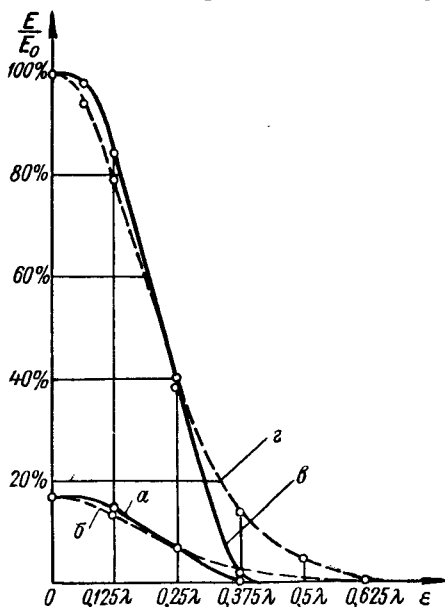
Вид деформированных зрачков показан на фиг. 98. Каждой параболе соответствует определенное значение величин  $\cos 2\pi\epsilon = \text{const}$  и  $\sin 2\pi\epsilon = \text{const}$ ; на фиг. 97 и 98 приведены значения величин  $\cos 2\pi\epsilon = \text{const}$ .





Фиг. 98. Вид деформированных зрачков: а и б — значения интеграла С; в — расстояния между кривыми в направлении оси абсцисс в условных единицах.

Осуществляя интегрирование с помощью формулы Симпсона по всей площади деформированных зрачков (площади деформированных зрачков сохраняются равновеликими площадям недеформированных зрачков), получаем значения интегралов  $C$  и  $S$ , сумма квадратов которых и определяет освещенность в интересующей нас точке пространства.



Фиг. 99. Освещенность в направлении, параллельном направлению прямых равных волновых aberrаций:

$\alpha$  — изменение освещенности при наличии астигматизма и при перемещении в направлении прямых равных волновых aberrаций;  $\beta$  — изменение освещенности для щели при отсутствии aberrаций.

Кривые  $\sigma$  и  $z$  соответствуют кривым  $\alpha$  и  $\beta$  для освещенности в центре пятна, принятой за 100%.

Кривая, выражающая зависимость освещенности в направлении, параллельном направлению прямых равных волновых aberrаций для точки, лежащей на главном луче нашего пучка, показана на фиг. 99. Эта зависимость приведена в табл. 10.

Эта зависимость довольно близко совпадает с изменением освещенности для случая щели прямоугольной формы с длиной, равной диаметру рассматриваемого круглого зрачка при равной начальной освещенности в точке, лежащей на оси круглого пучка.

Формулу (527) можно использовать для случая прямоугольного зрачка, причем пределы интегрирования будут независимыми друг от друга.

Полагая, что интегрирование будет производиться в пределах от  $u_{t1}$  до  $u_{t2}$  и от  $u_{s1}$  до  $u_{s2}$ , можно интегралы  $C$  и  $S$  в формулах (527) представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} C &= \int_{u_{t1}}^{u_{t2}} \int_{u_{s1}}^{u_{s2}} \cos 2\pi \frac{\varepsilon(u_t, u_s)}{\lambda} du_t du_s \\ S &= \int_{u_{t1}}^{u_{t2}} \int_{u_{s1}}^{u_{s2}} \sin 2\pi \frac{\varepsilon(u_t, u_s)}{\lambda} du_t du_s \end{aligned} \right\} \quad (584)$$

Рассмотрим изменение  $C$  и  $S$ , происходящее при удалении от главного луча в направлении апертурных углов  $u_t$  и  $u_s$ . Возникающее при этом изменение волновой aberrации может быть представлено в виде

$$\varepsilon = A_t u_t \quad \text{или} \quad \varepsilon = A_s u_s. \quad (585)$$

$\varepsilon : \lambda$	0,0000	0,0625	0,1250	0,1875	0,2500	0,3125	0,3750
$E : E_0$	0,1702	0,1673	0,1432	0,1070	0,0657	0,0316	0,0035

В соответствии с этим формулы (584) могут быть преобразованы в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} C &= \int_{-u_t}^{+u_t} \cos 2\pi \frac{A_t u_t}{\lambda} du_t \int_{-u_s}^{+u_s} du_s = 2u_s \frac{\lambda}{2\pi A_t} \int_{-\frac{\lambda}{2\pi A_t} z}^{+\frac{\lambda}{2\pi A_t} z} \cos z dz \\ S &= \int_{-u_t}^{+u_t} \sin 2\pi \frac{A_t u_t}{\lambda} du_t \int_{-u_s}^{+u_s} du_s = 2u_s \frac{\lambda}{2\pi A_t} \int_{-\frac{\lambda}{2\pi A_t} z}^{+\frac{\lambda}{2\pi A_t} z} \sin z dz \end{aligned} \right\} (586)$$

где

$$z = \frac{2\pi}{\lambda} A_t u_t; \quad u_t = \frac{\lambda}{2\pi A_t} z. \quad (587)$$

Выполняя интегрирование, находим:

$$C = -4u_t u_s \frac{\sin z}{z}; \quad S = 0 \quad (588)$$

и, переходя к освещенности  $E$ , получаем:

$$E = \frac{A^2}{\lambda^2} C^2 = \frac{A^2}{\lambda^2} 16u_t^2 u_s^2 \frac{\sin^2 z}{z^2}. \quad (589)$$

Переменная  $z$  может быть выражена через величину волновой аберрации на краю отверстия  $\varepsilon_\lambda$ :

$$z = \frac{2\pi\varepsilon}{\lambda} = 2\pi\varepsilon_\lambda. \quad (590)$$

Составим отношение

$$E : E_0, \quad (591)$$

где величина  $E_0$  — освещенность на главном луче рассматриваемого пучка лучей.

Величина освещенности уже была определена с помощью формулы (530); пользуясь этой формулой, можно выражение (591) представить в виде

$$\frac{E}{E_0} = \left[ \frac{\sin z}{z} \right]^2. \quad (592)$$

В случае сопоставления распределения световой энергии при наличии астигматизма у пучка лучей в форме кругового конуса с

распределением энергии у пучка лучей пирамидальной формы, свободного от аберраций, возникает некоторая неопределенность, обусловленная тем, что не были заданы величины апертурных углов для пучка пирамидальной формы.

В частности, один из апертурных углов можно задать равным апертурному углу конического пучка.

Второй же апертурный угол пирамидального пучка можно было бы определить, исходя из условия равенства освещенности в центре светового пятна как для пучка конической, так и для пучка пирамидальной формы. Это позволит устранить упомянутую выше неопределенность. Сопоставление обеих кривых распределения световой энергии в изображении точки показано на фиг. 99.

Исходя из этих соображений, можно вычислить распределение световой энергии для пучка лучей пирамидальной формы, приравнявая освещенность на главном луче пучка освещенности в центре изображения точки для конического пучка при наличии астигматизма. Результаты вычислений приведены в табл. 11.

Таблица 11

$\varepsilon : \lambda$	$E : E_0$
0,0000	0,1702
0,0625	0,1609
0,1250	0,1349
0,1875	0,1042
0,2500	0,0687
0,3125	0,0375
0,3750	0,0238

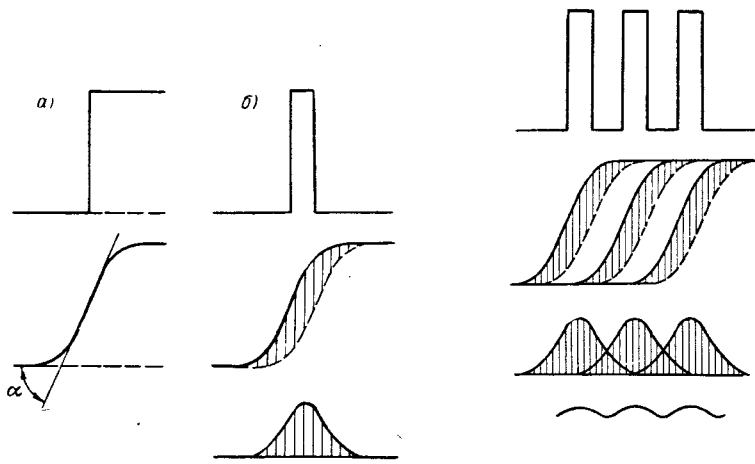
Из сопоставления данных табл. 11 и 10 видно, что обе зависимости хорошо совпадают.

До сих пор мы занимались вопросом распределения световой энергии в изображении точки при наличии тех или иных аберраций. Однако можно поставить вопрос об оценке оптической системы как передатчике информации от предмета к изображению.

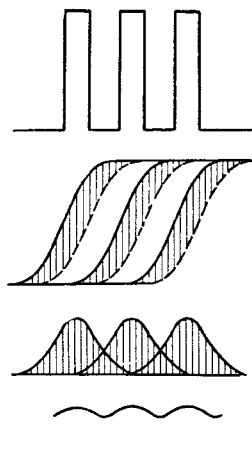
При этом нас будет интересовать, какие элементы предмета можно различить на его изображении, созданном оптической системой совместно с приемником световой энергии (глаз, фотографическая эмульсия, передающая телевизионная трубка и т. д.). В соответствии с этим в качестве критерия общей оценки качества изображения длительное время использовалась «разрешающая способность» оптической системы, полученная при рассмотрении создаваемого оптической системой изображения предмета — миры абсолютного контраста (системы чередующихся белых и черных штрихов с изменяющимися интервалами между штрихами).

В течение последних лет выявилась недостаточность этого метода, так как на практике обычно редко приходится работать с абсолютно контрастными объектами.

Затрагивая вопрос о получении изображения малоконтрастного объекта, мы сталкиваемся с явлением понижения контраста изображения в оптической системе, изучение которого удобно осуществлять с помощью рассмотрения процесса изменения освещенности изображения для объекта, представляющего границу черного и светлого



Фиг. 100. Пограничная кривая при абсолютно контрастной границе двух полей и образование абсолютно контрастной щели.



Фиг. 101. Образование изображения от абсолютно контрастной решетки при данной пограничной кривой.

полей. На фиг. 100,а изображено изменение яркости на предмете, характеризующееся прямой, перпендикулярной оси абсцисс; здесь же представлена кривая изменения освещенности на изображении этого объекта, создаваемого какой-либо оптической системой. Эта кривая в самом общем случае будет иметь в начале и в конце участка, на которых касательные к кривой составляют небольшие углы с осью абсцисс. В средней части кривая освещенности будет иметь касательную, для которой угол с осью абсцисс будет приобретать наибольшие значения. Величину такого наибольшего угла называют *п о г р а н и ч н ы м* *г р а д и е н т о м* и принимают его за дополнительный критерий для оценки качества изображения, создаваемого оптической системой.

Зная поведение пограничной кривой, можно получить кривую изменения освещенности изображения для штриха конечной ширины как разность ординат при сдвиге пограничной кривой на ширину передаваемого штриха (фиг. 100,б).

Поведение пограничной кривой позволяет получить картину и для нескольких штрихов; в этом случае изображение абсолютно контрастного объекта представится в виде синусоидальной кривой с миниму-

мами, не достигающими оси абсцисс. На изображении будет происходить ослабление контраста (фиг. 101), приводящее в пределе к потере разрешения (уровень минимумов сравнивается с уровнем максимумов).

## Глава XII

### ХРОМАТИЗМ

#### § 42. Дисперсия стекла. Оптические материалы

До сих пор при рассмотрении вопросов теории оптических приборов мы не касались явлений, связанных с изменением показателей преломления оптических сред в связи с изменением волны света, проходящего через нашу оптическую систему.

В современных условиях участок спектра, в котором работают те или иные оптические системы, значительно превосходит участок спектра, воспринимаемый непосредственно глазом человека.

Например, оптические приборы, работающие в близком инфракрасном участке спектра, должны воспринимать излучения с длиной волны до 1000—1200 *ммк*; оптические приборы, работающие в ультрафиолетовой части спектра, наоборот, должны воспринимать излучения с длиной волны около 300 *ммк*.

подавляющее число оптических приборов, работающих совместно с глазом, ограничивается диапазоном длин волн от красной линии спектра *A'* до фиолетовой линии *G'*. Величины длин волн для различных линий спектра приведены в табл. 12.

Таблица 12

Линия спектра	<i>A'</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>F</i>	<i>G'</i>
Длина волны (в <i>ммк</i> )	766,5	656,3	589,3	486,1	434,1

Для большинства оптических материалов, применяемых в оптических приборах, имеет место явление роста показателя преломления в связи с уменьшением длины волны света.

Это явление называется дисперсией стекла (или того или иного оптического материала). Для оптических стекол наблюдается рост показателя преломления при уменьшении длины волны, что называют нормальной дисперсией в отличие от аномальной дисперсии, т. е. роста показателя преломления при увеличении длины волны.

Величина дисперсии стекла может быть охарактеризована разностью между показателями преломления для каких-либо двух выбранных длин волн, например, для длин волн линий *C* и *F* спектра; дисперсию для этих волн иногда называют средней в отличие от дисперсий для каких-либо других длин волн.

Однако величина средней дисперсии еще не характеризует в достаточной степени преломляющих свойств стекла, так как одна и та же средняя дисперсия при различных показателях преломления для какой-то одной, исходной длины волны будет различно влиять на изменение свойств изображения при изменении длины волны света, проходящего через систему.

Поэтому для более полной характеристики дисперсионных свойств стекла прибегают к относительной дисперсии — отношению средней дисперсии к разности основного показателя преломления с единицей:

$$\frac{1}{v} = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}. \quad (593)$$

Величину  $v$ , обратную относительной дисперсии, называют коэффициентом дисперсии (или числом Аббе). Выбор в качестве средней дисперсии разности показателей преломления для линий спектра  $C$  и  $F$  был произведен для участка спектра, наиболее хорошо воспринимаемого глазом. Строя прибор, предназначенный для работы в инфракрасном или в ультрафиолетовом участке спектра, следует принимать за основную дисперсию разности показателей преломления для наиболее характерных линий рабочего участка спектра; кроме того, надо составлять для этих новых выбранных линий спектра как относительные дисперсии, так и соответственные коэффициенты дисперсии  $v$ .

Однако и величины коэффициентов дисперсии не всегда могут в достаточной мере дать характеристику той или иной марке оптического стекла или иного оптического материала, так как относительные дисперсии вычисляются, исходя из величин показателей преломления для двух длин волн (не считая величины основного показателя преломления).

Поэтому иногда возникает необходимость в определении величины дисперсий и для других длин волн, помимо средней дисперсии; эти дополнительные разности показателей преломления называют частными дисперсиями, а их отношение к средней дисперсии — относительными частными дисперсиями.

В ГОСТ 3514—57 или в каталогах оптического стекла приводят как величины средних дисперсий и коэффициентов дисперсии, так и величины частных дисперсий.

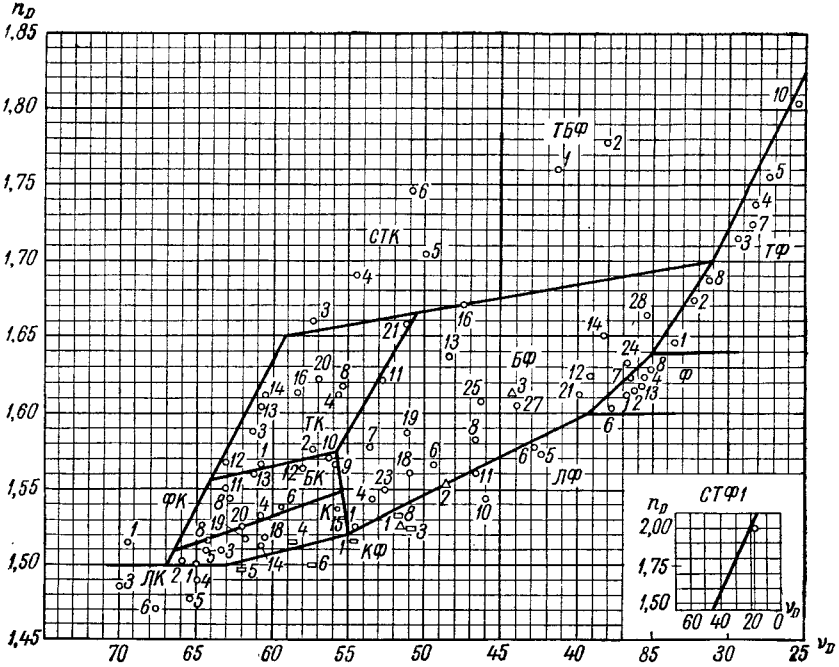
Сведения о показателях преломления и коэффициентах дисперсии для наиболее характерных марок современного оптического стекла и некоторых других оптических материалов приводятся в табл. 13 (см. ниже).

Простейшими марками оптического стекла являются, как известно, обыкновенные кроны ( $K$ ) с показателями преломления от 1,51 до 1,52 и коэффициентами дисперсии от 64 до 59 и обыкновенные флинты ( $F$ ) с показателями преломления от 1,61 и выше и коэффициентами дисперсии 36 и менее.

Эти простейшие марки оптического стекла характеризуются тем, что у них с ростом показателя преломления происходит постепенное

уменьшение коэффициентов дисперсии, что характеризует последовательный рост относительных дисперсий.

Промежуток между этими двумя группами марок оптического стекла заполняется группами марок, известных под названием легких флинтов (ЛФ) с показателями преломления 1,55—1,60 и коэффициентами дисперсии 50—40, и кронфлинтов с показателями преломления 1,52—1,54 и коэффициентами дисперсии 59—50.



Фиг. 102. Зависимость между показателями преломления и коэффициентами дисперсии для оптических стекол:

□ — кронфлинты; △ — особые флинты; ○ — все остальные стекла.

На фиг. 102 показано положение указанных марок оптического стекла; по оси абсцисс отложены значения коэффициентов дисперсии (в убывающем порядке) и по оси ординат — величины показателей преломления.

Из диаграммы видно, что и для легких кронов (ЛК) и кронфлинтов (КФ) также сохраняется зависимость роста показателей преломления с одновременным убыванием коэффициентов дисперсии, уже наблюдавшаяся для обыкновенных кронов и флинтов. Эти четыре группы марок оптического стекла иногда называют старыми марками оптического стекла.

Среди старых марок нельзя подобрать таких сочетаний из двух марок стекла, когда показатель преломления флинта был бы меньше или равен показателю преломления для крона при достаточно большой разности коэффициентов дисперсии.



Для решения ряда некоторых задач, возникающих при разработке более или менее сложных оптических систем, необходимо иметь такие пары марок оптического стекла, у которых показатель преломления для крона больше, нежели показатель преломления у флинта или, в крайнем случае, когда показатели преломления для крона и флинта равны друг другу.

Необходимость решения подобных задач привела к созданию новых марок оптического стекла — тяжелых кронов (ТК) с показателями преломления 1,55—1,61 и коэффициентами дисперсии 61—52. Таким образом, группа тяжелых кронов размещается на графике над областью кронов и кронфлинтов.

В последние десятилетия сортамент оптического стекла расширился благодаря созданию стекол с показателями преломления, меньшими 1,5—1,49 при коэффициентах дисперсии 65—70 (группа фосфатных кронов ФК), а также лантановых стекол (СТК) с показателями преломления порядка 1,70 и выше при коэффициентах дисперсии 50—54.

Группа лантановых стекол, обладающих показателями преломления, равными показателям преломления для тяжелых флинтов, имеет большую ценность при разработке оптических систем. Сочетание лантановых кронов с легкими или обыкновенными кронами позволяет обеспечивать большие разности показателей преломления при показателе преломления крона большем, нежели у флинта. Это во многих случаях позволяет значительно уменьшить кривизну радиусов поверхностей склеек. Кроме того, увеличение показателей преломления основных линз в оптической системе также ведет обычно к улучшению качества изображения.

Некоторые природные оптические материалы, в частности, флюорит, имеющий коэффициент дисперсии, равный 95,3 при показателе преломления 1,43, далеко выходит за пределы области сортамента оптического стекла. Помимо этого, флюорит представляет особый интерес благодаря его высокой прозрачности в ультрафиолетовой и инфракрасной частях спектра, а также ввиду весьма выгодного изменения его частных дисперсий, используемого для исправления вторичного спектра.

#### **§ 43. Хроматизм отдельной линзы в воздухе. Тонкая линза, concentричная линза, линза с равными радиусами. Мениск Максудова**

Изменение показателей преломления в оптической системе, связанное с переходом от одной длины волны света к другой, может привести к изменению величины изображения и положения изображения. В соответствии с этим различают **хроматизм увеличения**, выражающийся в изменении величины изображения, и **хроматизм положения**, выражающийся в изменении положения изображения.

В некоторых случаях встречаются системы, свободные от хроматизма увеличения либо от хроматизма положения; возможно также и соблюдение обоих условий ахроматизации системы одновременно.

Рассмотрим хроматизм простой линзы, выполненной из одного куска стекла и расположенной в воздухе. В этом случае толщина линзы и радиусы ее поверхностей при изменении длины волны остаются неизменными; изменение же показателей преломления связано с дисперсией стекла, из которого изготовлена линза.

Для оптической силы толстой линзы получено следующее выражение:

$$\varphi = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{d}{nr_1 r_2} (n - 1)^2. \quad (594)$$

В случае тонкой линзы, когда влиянием толщины линзы можно пренебречь, формула (594) принимает упрощенный вид:

$$\varphi = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (595)$$

Величины дисперсий всегда сравнительно невелики. Не делая большой погрешности, можно воспользоваться для отыскания изменения силы линзы, в связи с изменением длины волны и происходящим при этом изменением показателей преломления, дифференцированием выражения для оптической силы линзы как функции показателя преломления.

Логарифмируя, а затем дифференцируя формулу (595), получаем:

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{dn}{n-1} = \frac{1}{v}, \quad (596)$$

откуда нетрудно получить и выражение для хроматизма тонкой линзы; хроматизм такой линзы оказывается равным отношению силы линзы к коэффициенту дисперсии  $v$  стекла, из которого изготовлена линза.

Это объясняет причину, служившую основанием для использования коэффициентов дисперсии как характеристик дисперсионных свойств тех или иных марок оптического стекла.

Для линзы с равными радиусами (положительный мениск) первый член в формуле (594) обращается в нуль; поэтому выражение для силы линзы принимает следующий вид:

$$\varphi = \frac{(n-1)^2}{r^2} \cdot \frac{d}{n}. \quad (597)$$

Логарифмируя, а затем дифференцируя это выражение, получаем:

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{(n+1)dn}{n(n-1)} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{v}, \quad (598)$$

откуда

$$d\varphi = \frac{\varphi}{v} \cdot \frac{n+1}{n}. \quad (599)$$

Из формулы (599) нетрудно установить, что хроматизм мениска с равными радиусами превышает хроматизм тонкой линзы.

Перейдем к рассмотрению концентричной линзы. Выражение для оптической силы линзы принимает следующий вид:

$$\varphi = -\frac{n-1}{n} \cdot \frac{d}{r_1 r_2}. \quad (600)$$

Логарифмируя, а затем дифференцируя формулу (600), получаем:

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{dn}{n(n-1)} = \frac{1}{nv}, \quad (601)$$

откуда можно найти и величину хроматизма concentричной линзы:

$$d\varphi = \frac{\varphi}{nv}. \quad (602)$$

Как видно из формулы (600), оптическая сила concentричной линзы, если последняя имеет форму мениска, принимает отрицательное значение; поэтому хроматизм concentричного мениска будет иметь обратный знак по отношению к хроматизму положительного мениска. Абсолютная величина хроматизма concentричного мениска, как это следует из формулы (602), значительно меньше абсолютной величины хроматизма положительного мениска с равными радиусами (при сохранении оптической силы мениска с равными радиусами по абсолютной величине, равной оптической силе concentричного мениска). Таким образом, и оптическая сила, и хроматизм линзы менискообразной формы переходят через нулевое значение, но этот переход происходит не одновременно.

Поэтому можно поставить задачу отыскания такой формы менискообразной линзы, при которой имело бы место отсутствие хроматизма; эта задача решена в 1941 г. Д. Д. Максуповым<sup>1</sup>.

Дифференцируя общую формулу для оптической силы линзы [формула (594)] и приравнивая нулю полученное выражение, находим условие ахроматизации мениска:

$$d\varphi = 0 = \left[ \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{d}{r_1 r_2} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \right] dn, \quad (603)$$

откуда следует:

$$r_2 - r_1 + d - \frac{d}{n^2} = 0; \quad r_2 - r_1 + d = k = \frac{d}{n^2}. \quad (604)$$

Пользуясь формулами (604) и (594), можно получить выражение для оптической силы мениска Максупова:

$$\varphi = - \frac{(n-1)^2 d}{r_1 r_2 n^2} = - \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^2 \frac{d}{r_1 r_2}. \quad (605)$$

Из уравнения (605) видно, что для максуповского мениска получается отрицательное значение его оптической силы, так как оба радиуса мениска имеют один и тот же знак, а все остальные величины всегда положительны.

Пользуясь формулами (604) и (605), можно исключить один из радиусов, например  $r_2$ ; тогда выражение для силы максуповского мениска свяжет величину его толщины и первого радиуса:

$$\varphi = - \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^2 \frac{d}{r_1 \left( r_1 + \frac{d}{n^2} - d \right)}; \quad (606)$$

<sup>1</sup> Д. Д. Максупов, *Астрономическая оптика*, Гостехиздат, 1946.

изменяя один из этих параметров, можно, сохранив оптическую силу мениска неизменной, воздействовать на какую-либо из монохроматических аберраций последующей (или предыдущей) оптической системы (например, на сферическую аберрацию).

Для этой цели в качестве другого параметра можно воспользоваться и изменением оптической силы мениска, однако в этом случае будет нарушена сила всей системы, в которую введен мениск.

В формулу для ахроматизации мениска не входят выражения для дисперсии стекла, из которого изготавливается мениск, поэтому ахроматизация будет соблюдаться для широкого участка спектра; мениск Максутава будет являться, таким образом, апохроматичной системой.

#### § 44. Ахроматизация системы из двух тонких соприкасающихся линз

Для оптической силы системы, составленной из двух тонких соприкасающихся линз, существует следующее выражение:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \quad (607)$$

Дифференцируя это выражение, получаем:

$$d\varphi = d\varphi_1 + d\varphi_2; \quad (608)$$

пользуясь выражением (596) для хроматизма тонкой линзы, находим условие ахроматизации для системы двух тонких линз:

$$d\varphi = \frac{\varphi_1}{\nu_1} + \frac{\varphi_2}{\nu_2} = 0, \quad (609)$$

откуда

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = - \frac{\nu_1}{\nu_2}. \quad (610)$$

Формула (610) показывает, что оптическая сила «флинтовой» линзы (с меньшим коэффициентом дисперсии) должна быть по абсолютной величине меньше оптической силы «кроновой» линзы; имея в виду, что оптические силы «кроновой» и «флинтовой» линз имеют разные знаки, нетрудно прийти к выводу, что знак оптической силы «кроновой» линзы будет совпадать со знаком суммарной оптической силы системы обеих линз.

В формулах (609) и (610) даны коэффициенты дисперсии как для «кроновой», так и для «флинтовой» линзы; поэтому эти формулы обеспечат ахроматизацию лишь для тех линий спектра, для которых и были найдены коэффициенты дисперсии; формулы (609) и (610) обеспечивают ахроматизацию лишь для двух каких-либо линий спектра.

В общем случае для какого-либо третьего участка спектра уже не будет наблюдаться ахроматизация; мы встретимся с явлением «вторичного спектра».

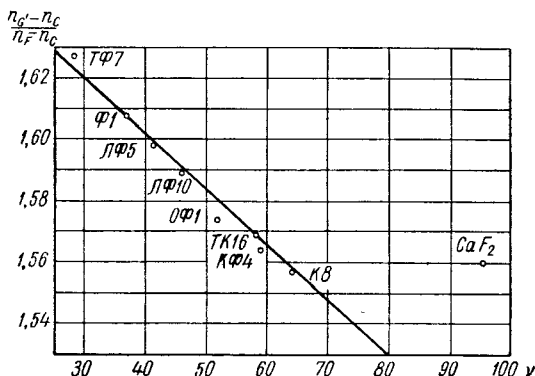
Дополнительно к условию (609) или (610) можно наложить условие для одновременной ахроматизации какого-либо третьего цвета — условие апохроматизации.

Условие апохроматизации можно рассматривать как двукратную ахроматизацию; это условие можно было бы записать в виде повторения формулы (610) для новых значений коэффициентов дисперсии:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = -\frac{\nu_1}{\nu_2} = -\frac{\nu'_1}{\nu'_2}; \quad \frac{\nu_1}{\nu'_1} = \frac{\nu_2}{\nu'_2} = \frac{dn'_1}{dn_1} = \frac{dn'_2}{dn_2} = \vartheta, \quad (611)$$

где  $\nu'_1$  и  $\nu'_2$  — коэффициенты дисперсии для двух других линий спектра.

Условие апохроматизации по существу сводится к постоянству отношений  $\vartheta$  величин частных дисперсий  $dn'$  и  $dn$ .



Фиг. 103. Зависимость относительных частных дисперсий от коэффициента  $\nu$ .

Величины отношений  $\vartheta$  частных дисперсий, например для линий спектра  $C$ ,  $F$  и  $G'$  для большинства силикатных стекол могут быть выражены следующей эмпирической формулой:

$$\vartheta_{G', C} = \frac{\nu}{\nu'} = \frac{dn'}{dn} = \frac{n_{G'} - n_C}{n_F - n_C} = 1,674 - 0,0018\nu_{FC} = a + b\nu. \quad (612)$$

Можно показать, что зависимость, представленная формулой (612), выражает собой некоторую прямую линию (фиг. 103).

На фигуре за ось абсцисс принята ось коэффициентов дисперсии и за ось ординат — ось чисел, выражающих относительные частные дисперсии для участка спектра от линии  $C$  до линии  $G'$ .

На этом же графике дано расположение точек, выражающих относительные частные дисперсии для различных марок оптического стекла, приведенных в табл. 13.

В этой таблице для различных марок оптического стекла приведены значения показателей преломления для различных длин волн; во второй строке для каждой из приведенных марок стекла даны относительные частные дисперсии для каждого из промежутков; кроме того, для каждой из марок приведена также относительная частная дисперсия для участка спектра от линии  $C$  до линии  $G'$  (помещенная под коэффициентом дисперсии  $\nu$ ).

Таблица 13

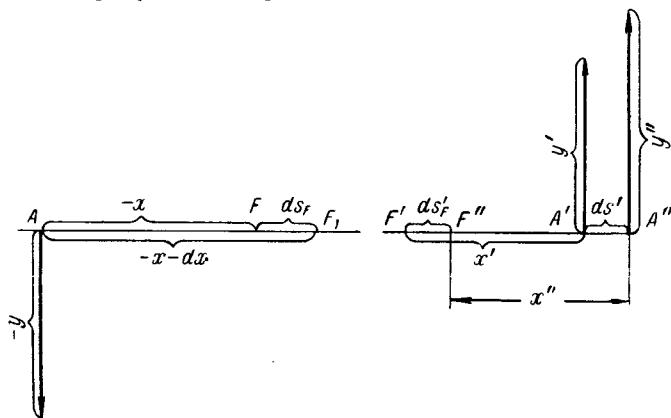
Марка стекла	$\nu$	$n_C$	$n_D$	$n_F$	$n_{G'}$
	$\frac{n_{G'} - n_C}{n_F - n_C}$	$\frac{n_D - n_C}{n_F - n_C}$	$\frac{n_F - n_D}{n_F - n_C}$	$\frac{n_{G'} - n_F}{n_F - n_C}$	
К8	64,1	1,51390	1,51630	1,52196	1,52645
	1,557	0,298	0,702	0,557	
КФ4	58,9	1,51550	1,51810	1,52429	1,52925
	1,564	0,296	0,704	0,565	
ТК16	58,3	1,60951	1,61260	1,62001	1,62598
	1,569	0,294	0,706	0,569	
ЛФ10	45,9	1,54455	1,54800	1,55650	1,56357
	1,589	0,289	0,711	0,590	
ЛФ5	41,3	1,57090	1,57490	1,58482	1,59315
	1,598	0,287	0,713	0,599	
Ф1	36,9	1,60806	1,61280	1,62465	1,63473
	1,608	0,286	0,714	0,607	
ТФ7	28,3	1,72080	1,72800	1,74650	1,76262
	1,627	0,280	0,720	0,628	
ОФ1	51,8	1,52640	1,52940	1,53662	1,54249
	1,574	0,294	0,706	0,574	
CaF <sub>2</sub>	95,3	1,43250	1,43385	1,43705	1,43960
	1,560	0,297	0,703	0,560	

В табл. 13 приведены также данные для одной из марок стекла, особого флинта — ОФ1, который был специально разработан для целей уменьшения вторичного спектра; кроме того, в этой же таблице приведены данные для флюорита ( $\text{CaF}_2$ ).

Из фиг. 103 видно, что и стекло ОФ1, и флюорит располагаются на некотором расстоянии от прямой, на которой находятся другие марки стекла, приведенные в табл. 13.

#### § 45. Изменение хроматизма в связи с изменением положения предмета

Предположим, что имеется некоторая оптическая система (фиг. 104). Можно себе представить, что при переходе от одной длины волны света к другой произойдет как изменение положения и величины изображения, так и изменение величин фокусных расстояний системы и положения ее фокусов — переднего и заднего.



Фиг. 104. Пример установления зависимости изменения хроматизма положения от изменения положения предмета.

Всегда можно далее предположить, что величина предмета остается неизменной (например, когда предмет материален) при изменении длины волны.

Пусть на фиг. 104 в точке  $A$  расположен предмет  $y$ ; а в точках  $F$  и  $F_1$  — передние фокусы для двух различных длин волн спектра; расстояние между этими фокусами примем равным  $ds_f$ .

В точках  $F'$  и  $F''$  расположатся задние фокусы для тех же самых длин волн; расстояние между задними фокусами можно обозначить через  $ds'_f$ .

В точках  $A'$  и  $A''$  расположатся изображения  $y'$  и  $y''$ ; расстояние между этими точками (хроматизм положения) обозначим через  $ds'$ .

Через  $x$ ,  $x'$  и  $x''$  обозначим расстояния от соответствующих фокусов до точек  $A$ ,  $A'$  и  $A''$ .

Из фиг. 102 следует:

$$dx = -ds_f; \quad x' + ds' = ds'_f + x''. \quad (613)$$

Определим величины линейных увеличений для обеих длин волн. Имеем:

$$V = -\frac{f}{x}; \quad V' = -\frac{f+df}{x+dx} = -\frac{f}{x} \cdot \frac{1+\frac{df}{f}}{1+\frac{dx}{x}}. \quad (614)$$

Определяя хроматизм увеличения как разность этих увеличений, находим:

$$dV = V' - V = V \left[ \frac{1+\frac{df}{f}}{1+\frac{dx}{x}} - 1 \right] \quad (615)$$

или

$$dV = V \frac{\frac{df}{f} - \frac{dx}{x}}{1 - \frac{dx}{x}} = V \frac{\frac{df}{f} + \frac{ds_F}{x}}{1 - \frac{ds_F}{x}}. \quad (616)$$

Пользуясь фиг. 104, можем найти величину хроматизма положения. Получаем

$$ds' = ds'_F + x'' - x' = ds'_F - V'(f' + df') + Vf' \quad (617)$$

или

$$ds' = ds'_F - Vdf' - f'dV - dVdf'. \quad (618)$$

Задаваясь хроматизмом увеличения, равным нулю, согласно формуле (616), находим:

$$dV = 0; \quad \frac{df}{f} = -\frac{ds_F}{x}; \quad df = V ds_F. \quad (619)$$

Можно задаться равенством хроматизма увеличения для различных увеличений; для этого будет необходимо выполнить условия:

$$ds_F = 0; \quad df = 0, \quad (620)$$

что обеспечивает соблюдение равенства (619) независимо от увеличения.

Перейдем к рассмотрению хроматизма положения. Полагая хроматизм положения равным нулю, согласно формуле (618) получаем:

$$ds' = 0 = ds'_F - Vdf' - f'dV - dVdf', \quad (621)$$

и в случае одновременного уничтожения хроматизма положения для другого положения предмета необходимо, чтобы имело место выполнение условий:

$$ds'_F = Vdf'; \quad dV = 0. \quad (622)$$



Величина хроматизма положения может быть представлена как функция увеличения

$$ds' = ds'_F - V \left[ df' + \frac{f'_t + df'}{f} \cdot \frac{df - Vds'_F}{1 - \frac{ds'_F}{x}} \right] \quad (623)$$

или

$$ds' = ds'_F - V \left[ df' + (f'_t + df') \frac{df - Vds'_F}{f + Vds'_F} \right]. \quad (624)$$

Можно поставить условие независимости хроматизма положения от увеличения. Для этой цели необходимо, чтобы

$$-df' = (f' + df') \frac{df - Vds'_F}{f + Vds'_F} = \text{const}, \quad (625)$$

что возможно лишь в случае, когда

$$ds'_F = 0 \quad (626)$$

и когда

$$fdf' = -f'df - df'df; \quad \frac{df'}{f'} = -\frac{df}{f} - \frac{df'}{f} \cdot \frac{df}{f}. \quad (627)$$

Как известно, фокусные расстояния связываются друг с другом формулой

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}. \quad (628)$$

Логарифмируя, а затем дифференцируя формулу (628), получаем:

$$\frac{dn}{n} - \frac{dn'}{n'} = \frac{df}{f} - \frac{df'}{f'} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\nu} - \frac{1 - \frac{1}{n'}}{\nu'}. \quad (629)$$

В случае, если система находится в одной и той же среде (например, в воздухе),  $dn = dn'$ , а следовательно, и

$$df = -df'. \quad (630)$$

Если наряду с постоянством хроматизма положения обусловить для одного положения предмета отсутствие хроматизма увеличения, то, согласно формулам (619) и (620), можно прийти к выводу, что будет наблюдаться отсутствие хроматизма увеличения при любых увеличениях, т. е. при произвольном положении предмета; однако это будет иметь место при соблюдении равенства

$$df' = 0, \quad (631)$$

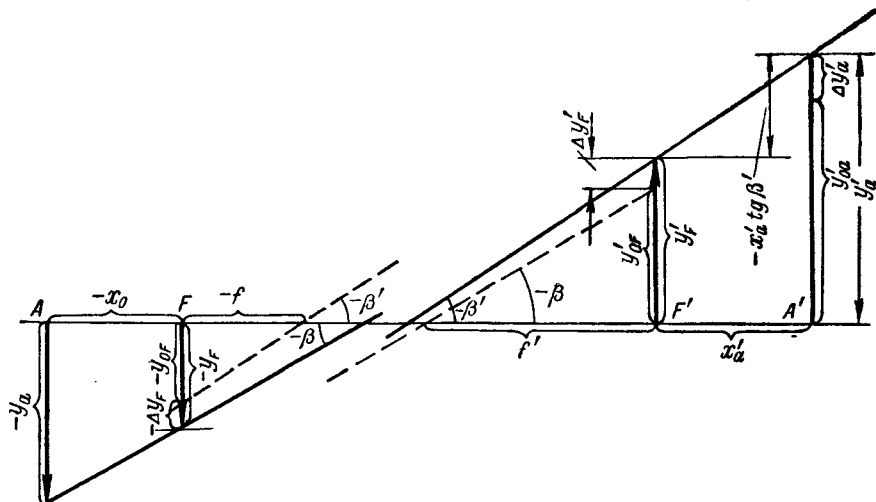
что возможно, например, тогда, когда система находится в воздухе или в одной и той же среде.

Ясно, что, налагая третье условие — равенство хроматизма положения нулю, получим полную ахроматизацию при произвольном положении предмета.

Однако необходимо заметить, что мы в наших выводах ограничивались до сих пор лишь областью оптики идеальных систем; поэтому

вполне естественно при наличии достаточно больших полей зрения поставить вопрос о рассмотрении изменения хроматизма при больших полях зрения.

Наиболее целесообразно воспользоваться для этой цели изменением дисторсии, учитывая как явление изменения самой дисторсии в зависимости от изменения положения предмета, так и изменение дисторсии при переходе от одной длины волны света к другой.



Фиг. 105. Установление зависимости изменения хроматизма увеличения от изменения положения предмета.

На фиг. 105 показан ход главного луча в пространстве предметов и в пространстве изображений. Величину предмета примем равной  $y_a$ , величину реального изображения, создаваемого главным лучом (относительно хода главного луча не делается никаких ограничений), обозначим через  $y'_a$ ; величины изображений, возникающих в передней и задней фокальных плоскостях системы, обозначим соответственно через  $y_F$  и  $y'_F$ .

Углы главного луча с осью системы обозначим, как обычно, через  $\beta$  и  $\beta'$ ; фокусные расстояния системы соответственно через  $f$  и  $f'$ .

Величины изображений, определяемые на основании законов оптики идеальных систем, назовем соответственно  $y_{0F}$  и  $y'_{0F}$ ; тогда величины дисторсии определяются, как разности между величинами соответствующих реальных и идеальных изображений.

Из фиг. 105 находим известные соотношения для величин идеальных изображений в передней и задней фокальных плоскостях системы:

$$y'_{0F} = f \operatorname{tg} \beta; \quad y_{0F} = f' \operatorname{tg} \beta'. \quad (632)$$

Пользуясь фиг. 105, можно определить и величину реального изображения  $y'_a$ . Находим:

$$y'_a = y'_F - x'_a \operatorname{tg} \beta' = y'_{0F} + \Delta y'_F + V f' \operatorname{tg} \beta'. \quad (633)$$

Аналогичным образом может быть определена величина предмета:

$$y_a = y_F - x_a \operatorname{tg} \beta = y_{0F} + \Delta y_F + \frac{f}{V} \operatorname{tg} \beta. \quad (634)$$

Умножая выражение (634) на величину линейного увеличения  $V$ , можно определить величину идеального изображения  $y'_{0a}$ :

$$y'_{0a} = V y_a = V y_{0F} + V \Delta y_F + f \operatorname{tg} \beta. \quad (635)$$

Составляя разность величин  $y'_a$  и  $y'_{0a}$ , представленных формулами (633) и (635), и имея в виду формулу (632), получаем выражение для изменения величины дисторсии в зависимости от изменения положения предмета:

$$\Delta y'_a = \Delta y'_F - V \Delta y_F. \quad (636)$$

Дифференцируя формулу (636), получаем выражение для изменения дисторсии при переходе от одной длины волны света к другой — выражение для изменения «хроматической дисторсии»;

$$d(\Delta y'_a) = d(\Delta y'_F) - dV \Delta y_F - V d(\Delta y_F). \quad (637)$$

Из формулы (637) видно, что уничтожение «хроматической дисторсии» в передней и задней фокальных плоскостях системы с одновременным уничтожением хроматизма увеличения является условием уничтожения «хроматической дисторсии» для произвольного положения предмета.

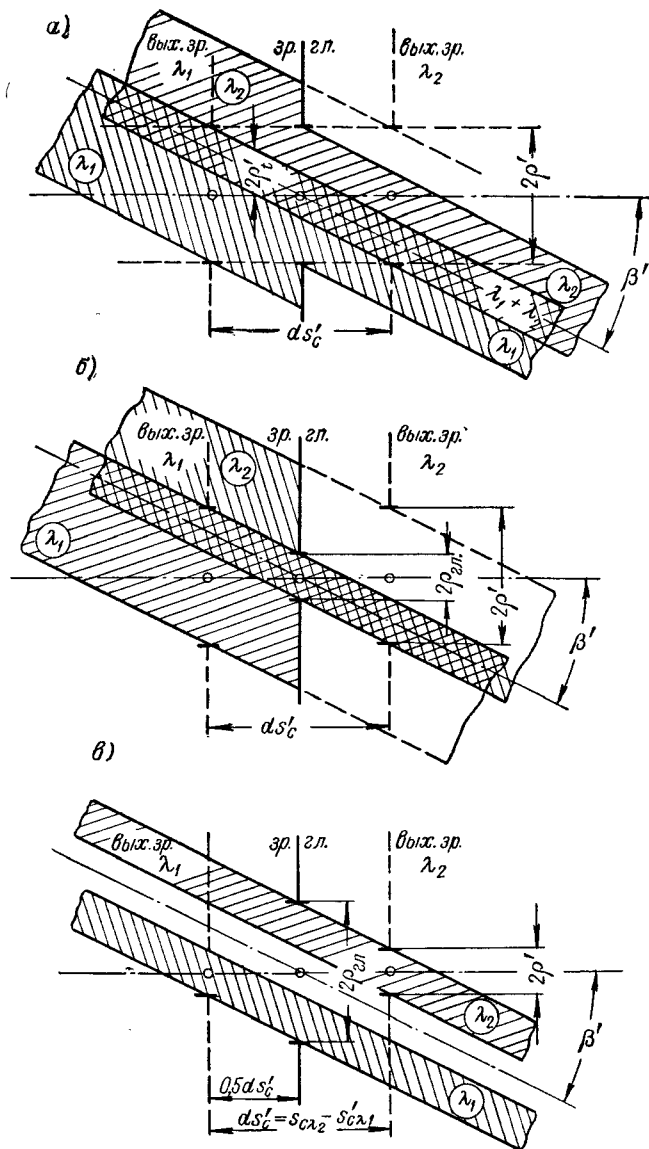
#### § 46. Хроматизм в зрачке

Выше был частично рассмотрен вопрос об исправлении хроматизма положения для двух положений предмета. Полагая одно из этих положений предмета совпадающим с положением входного зрачка системы, можно было бы говорить о влиянии исправления хроматизма в зрачках на ахроматизацию в фокальных плоскостях и на ахроматизацию при произвольном положении предмета. Действуя таким образом, можно было бы установить влияние хроматизма в зрачках на ахроматизацию изображения косвенным путем.

Однако в некоторых случаях, например в случае телескопической системы, работающей совместно с глазом, наблюдается влияние хроматизма в выходном зрачке на качество изображения путем изменения соотношения между освещенностями изображения на сетчатке глаза для различных участков спектра на краю поля зрения.

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Диаметр выходного зрачка телескопической системы (или микроскопа) равен диаметру зрачка глаза (фиг. 106). В этом случае наличие хроматизма в зрачке приводит к тому, что если зрачок глаза будет совмещен с выходным зрачком системы для одного цвета, то для другого цвета между зрачком глаза и выходным зрачком системы будет наблюдаться некоторое расхождение, обусловленное величиной хроматизма в зрачке.



Фиг. 106. Хроматизм положения в выходном зрачке:

- а — выходной зрачок прибора равен зрачку глаза:  $\rho' = \rho_{\text{гл}}$ ;  
 б — выходной зрачок прибора больше зрачка глаза:  $\rho' > \rho_{\text{гл}}$ ;  
 в — выходной зрачок прибора меньше зрачка глаза:  $\rho' < \rho_{\text{гл}}$ .

Для осевого пучка подобное расхождение зрачков не имеет никакого значения; но для наклонных пучков расхождение выходных зрачков приводит к изменению виньетирования (при отсутствии виньетирования для совмещенных зрачков), которое ведет к уменьшению светового потока, попадающего в глаз наблюдателя.

Такое виньетирование будет нарастать к краям поля зрения, приводя к соответственному ослаблению цветовой составляющей на изображении: общий цветовой тон изображения на краю поля будет постепенно приближаться к цвету, для которого имело место совпадение выходного зрачка и зрачка глаза.

Перемещая глаз вдоль оси системы и совмещая зрачок глаза с выходными зрачками системы для того или иного цвета, будем соответственно изменять общий цветовой тон изображения в краевых зонах поля.

Пользуясь фиг. 106, можно определить величину виньетирования. Меридиональный диаметр пучка, попадающего в глаз, будет равен

$$2\rho'_i = 2\rho' - |ds'_c \operatorname{tg} \beta'|. \quad (638)$$

2. Диаметр выходного зрачка системы намного больше диаметра зрачка глаза (фиг. 106). В некоторых пределах величина хроматизма в зрачке не сможет влиять на изображение, так как зрачок глаза хотя и не будет совпадать с выходными зрачками системы для различных цветов, но тем не менее разные части пучков лучей, наклонно проходящих через цветные зрачки системы, не совпадающие со зрачком глаза, будут ограничиваться по ширине самим зрачком глаза и в этом случае виньетирование на зрачке глаза не возникнет. Можно установить этот предел для величины хроматизма в зрачке. Из фиг. 106 следует:

$$2\rho' - 2\rho''_{2\lambda} = |ds'_c \operatorname{tg} \beta'|$$

откуда

$$|ds'_c| \leq \frac{2(\rho' - \rho''_{2\lambda})}{|\operatorname{tg} \beta'|}. \quad (639)$$

3. Зрачок глаза значительно превосходит выходной зрачок системы (случай, характерный для микроскопов; см. фиг. 106). В этом случае в некоторых пределах также не будет наблюдаться влияния хроматизма в зрачке на окраску изображения, так как, несмотря на расхождение выходных зрачков системы по положению, наклонные пучки лучей для всех цветов полностью пройдут через зрачок глаза, хотя и через разные его участки. Установим эти границы. Из фиг. 106 находим:

$$2(\rho_{2\lambda} - \rho') = |ds'_c \operatorname{tg} \beta'|,$$

откуда легко определяется допустимая величина хроматизма в зрачке:

$$|ds'_c| \leq \frac{2(\rho_{2\lambda} - \rho')}{|\operatorname{tg} \beta'|}. \quad (640)$$

Из рассмотренных выше примеров (фиг. 106) видно, что при наличии хроматизма положения в выходном зрачке прибора глаз наблюдателя следует помещать посередине расстояния  $ds'_c$  между крайними положениями цветных изображений зрачков.

ЧАСТЬ IV  
СИНТЕЗ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Глава XIII

ВВЕДЕНИЕ

**§ 47. Общая задача разработки оптической системы**

Разработка любой оптической системы может быть разделена на две части:

- 1) создание габаритной схемы оптики;
- 2) расчет оптической системы, обеспечивающий нужное качество изображения, нередко называемый абберационным расчетом оптической системы.

Абберационным расчетом определяются все элементы оптической системы, необходимые для ее изготовления.

Абберационный расчет можно разделить на два этапа:

- 1) выбор типа оптической системы — определение числа линз, их формы и взаимного расположения;
- 2) собственно расчет выбранной оптической системы — определение наивыгоднейших значений радиусов, показателей преломления, толщины линз и воздушных промежутков, а также допустимых отверстий на самих линзах и диафрагмах, ограничивающих ход лучей, проходящих через оптическую систему.

В настоящее время первому этапу абберационного расчета уделяется мало внимания.

Выбор типа системы часто ограничивается лишь рассмотрением уже известных оптических систем и отбором системы, наиболее близкой по своим характеристикам к разрабатываемой системе.

Выбор типа системы заранее предопределяет ее коррекционные возможности; если они не будут удовлетворять предъявляемым к системе требованиям, разрабатываемая оптическая система не сможет дать удовлетворительного результата и должна быть либо заменена другой, с большими возможностями, либо требования, предъявляемые к системе, должны быть снижены в соответствии с возможностями системы.

Существенно подчеркнуть, что 90% трудностей, возникающих при расчетах различных оптических систем, объясняются выбором типа системы, не обладающего достаточными коррекционными возможностями.

Правильно выбранный тип оптической системы заранее предопределяет получение положительных результатов при расчете системы, каким бы методом этот расчет ни производился.

Таким образом, выбор типа разрабатываемой оптической системы представляет интерес не только для оптиков-вычислителей, но и для широкого круга потребителей данной оптической системы. Собственно же методы расчета оптических систем не могут влиять на окончательные результаты расчета оптической системы; методы расчета могут влиять лишь на время и трудоемкость выполнения самих расчетов, что при очень длительной «живучести» хорошей оптической системы имеет третьестепенное значение.

Изучение возможностей той или иной оптической системы может быть в известной степени проведено на основе использования теории аббераций третьего порядка. Невозможность удовлетворения условиям устранения аббераций третьего порядка во многих случаях предопределяет невозможность получения системы, дающей удовлетворительное качество изображения. Однако и удовлетворение условий устранения аббераций третьего порядка не всегда гарантирует получение положительных результатов, в особенности, если разрабатываемая оптическая система имеет сколько-нибудь повышенные характеристики.

Получение положительных результатов в реальной оптической системе автоматически приводит к удовлетворению условий уничтожения аббераций третьего порядка. Учитывая, что при разработке оптических систем с повышенными оптическими характеристиками (такие оптические системы будут являться объектами современных разработок) решающее значение будет иметь выявление возможностей исправления аббераций высших порядков, надо отдать предпочтение методике исследования различных типов оптических систем, проводимой в области реальных полей зрения и апертур, а также в области реальных аббераций.

#### § 48. Историческое развитие техники расчета оптических систем

Главными задачами периода изобретения (конец XVI — начало XVII вв.) первых оптических приборов (камеры — обскуры, зрительной трубы, микроскопа) были нахождение даваемых оптическими системами изображений, определение фокусных расстояний линз и зеркал.

Вопросы, связанные с теорией работы зрительной трубы, глаза и микроскопа впервые были обобщены великим Кеплером в его «Диоптрике» (1611 г.), явившейся краеугольным камнем современной теории оптических приборов.

Применявшиеся в качестве объективов первых оптических приборов простые одиночные линзы не были и не могли быть ахроматизированными, поэтому в вопросе оценки качества изображения главное значение имел хроматизм, затушевывавший другие абберации простых линз (например, сферическую абберацию на оси системы).

Независимость хроматизма тонкой линзы заданного фокусного расстояния от формы (прогиба) линзы позволяла практически ограничи-

ваться линзами простейших форм (например, плоско-выпуклых или двояковыпуклых с равными радиусами), что не помешало достаточно удовлетворительно решить такие задачи, как создание простейших окуляров (окуляры Гюйгенса и Рамсдена), состоящих из двух плоско-выпуклых линз.

Открытие в XVII в. точной формулировки закона преломления Снеллем и Декартом дало возможность теоретического анализа монохроматических аберраций различных линз; небезынтересно, что с целью уничтожения сферической аберрации, неустранимой в простых линзах со сферическими поверхностями, Декарт обратился к использованию поверхностей несферической формы и даже спроектировал специальный станок для шлифования линз с несферическими поверхностями.

Весьма важную роль сыграло в развитии оптических приборов открытие Ньютоном явления дисперсии: им была доказана невозможность ахроматизации простых линз (что Ньютон необоснованно распространил и на систему из двух или нескольких линз), и это заставило Ньютона обратиться к использованию в качестве объективов зрительных труб (телескопов) сферических или параболических зеркал.

Кроме того, Ньютону принадлежит ряд известных формул, определяющих положение предмета и изображения, сферической аберрации одной сферической поверхности; он указал также способ построения фокусов тонких астигматических пучков.

Величайшее значение для дальнейшего развития оптики и оптических приборов имела выдвинутая Гюйгенсом в 1678 г. волновая теория света; будучи подвергнута дальнейшему усовершенствованию (Френель, Кирхгоф, Максвелл и др.), она дала возможность обобщить ряд световых и электромагнитных явлений и нашла широкое применение в оптике и в радиотехнике.

Ошибочное мнение Ньютона о невозможности ахроматизации линзовых систем, состоящих из двух или большего числа линз, в середине XVIII в. было теоретически опровергнуто Эйлером; в 1755 г. Доллонду удалось практически осуществить двухлинзовые ахроматические объективы — основной конструктивный элемент для множества современных оптических приборов (зрительных труб, микроскопов и др.).

Создание двухлинзового ахроматического объектива как несклеенного, так и склеенного, позволило при соответствующем подборе марок стекла решить задачу исправления трех аберраций — хроматизма, сферической аберрации и комы — или, при соответственно неисправленной коме, астигматизма для определенного положения входного зрачка.

Коррекционные возможности таких объективов в случае применения тонких линз весьма ограничены; при данных марках стекла у несклеенного объектива имеется три, а у склеенного объектива — два свободных параметра.

Это позволяет сравнительно быстро исчерпать имеющиеся возможности двухлинзового объектива любыми приемами, и поэтому неудивительно, что в ряде случаев оптимальные значения радиусов кри-



визны удавалось находить чисто эмпирическим путем, последовательно изменяя радиусы кривизны той или другой линзы объектива.

Такой метод изменения радиусов кривизны и изучение влияния этих изменений на исправление тех или иных аберраций оптической системы были реализованы также и аналитически — путем замены физического изменения кривизны поверхностей отдельных линз тригонометрическим расчетом хода лучей через поверхности разрабатываемой системы и последующего определения изменений аберраций системы.

Подобный метод получил название «метода проб» и нашел широкое применение при разработке сложных оптических систем.

Крупным событием в истории развития расчетов оптических систем явилось создание в 1840 г. портретного объектива Пецваля, далеко опередившего технику своего времени. Объектив Пецваля имел большое относительное отверстие, достигавшее величины 1:3,2; у этого объектива впервые было достигнуто одновременное и хорошее исправление сферической аберрации, комы и астигматизма при вполне удовлетворительном исправлении хроматизма.

Эти объективы получили весьма широкое распространение и находились в эксплуатации более 100 лет.

Методика, которой пользовался Пецваль, не дошла до нас; однако известно, что объектив Пецваля был построен на основании вычислений.

Работа по созданию портретного объектива была осуществлена в чрезвычайно короткие сроки (1836—1840 гг.); при этом был решен комплекс задач технической оптики (например, оценка качества изображения, выбор типа системы, создание собственно техники вычислений) и чисто технологические задачи.

Уже значительно позже Штейнгелем (1865 г.) было создано несколько симметричных объективов — объективы типа Перископ, апланаты; однако эти объективы хотя и явились прототипами разработанных впоследствии объективов двойных анастигматов, но уступали по своей силе объективу Пецваля.

В этот период времени получила развитие теория оптических приборов. В 1844 г. Гаусс дал законченную теорию идеальной оптической системы.

Огромное значение для развития оптического приборостроения имело открытие в 1815 г. Фраунгофером спектральных линий, позволивших обеспечить высокую точность измерения показателей преломления и дисперсии оптических стекол.

Большую роль в оптическом приборостроении сыграл Э. Аббе, решивший ряд теоретических и практических вопросов, начиная от создания дифракционной теории образования изображения в микроскопе и кончая вопросами измерения показателей преломления и фокусных расстояний.

В числе работ Аббе нельзя не отметить работы по последовательному усовершенствованию уже известных оптических систем посредством введения дополнительных компонентов: введение (совместно с П. Рудольфом) в объективе типа Перископ ахроматизирующей систему плоскопараллельной пластинки с хроматическими радиусами.

Аббе правильно оценил значение разработки новых марок оптического стекла — тяжелых кронов и легких флинтгов, созданных по его заданию О. Шоттом.

Тяжелые кроны и легкие флинты сразу нашли широкое применение в фотографических объективах — анастигматах, целая серия которых появилась в конце прошлого столетия (двойные анастигматы Рудольфа, Гёега и др.).

В качестве курьеза можно заметить, что первоначально применение новых марок оптического стекла — тяжелых кронов и легких флинтгов — объяснялось якобы стремлением соблюсти условие Пецваля, необходимое для уничтожения кривизны поля, хотя в первых анастигматах условие Пецваля соблюдалось за счет использования нужных для этого значений радиусов кривизны.

К началу XX в. фотографическая оптика уже насчитывает довольно большое число различных конструкций; кроме двойных анастигматов, она обогатилась конструкцией трехлинзового анастигмата типа триплет, разработанного Тэйлором в 1895 г. экспериментальным путем; в 1900 г. Гёегом создан двухлинзовый широкоугольный объектив Гипергон с полем зрения до  $135^\circ$ ; в 1902 г. Рудольф создал широкоизвестный четырехлинзовый объектив Тессар, усовершенствованный в дальнейшем Вандерслебом (1907) и Мерте (1921).

К этому же периоду времени относится и ряд работ по исследованию некоторых простейших оптических систем с помощью теории аббераций третьего порядка. К числу этих работ относятся, например, исследования двухлинзового склеенного объектива (Гартинг, Глейхен), фотообъективов типа триплет (Шварцшильд, Кербер).

Однако эти исследования не могли удовлетворить запросов практической разработки оптических систем; поэтому появились попытки введения тех или иных поправок к формулам теории аббераций третьего порядка.

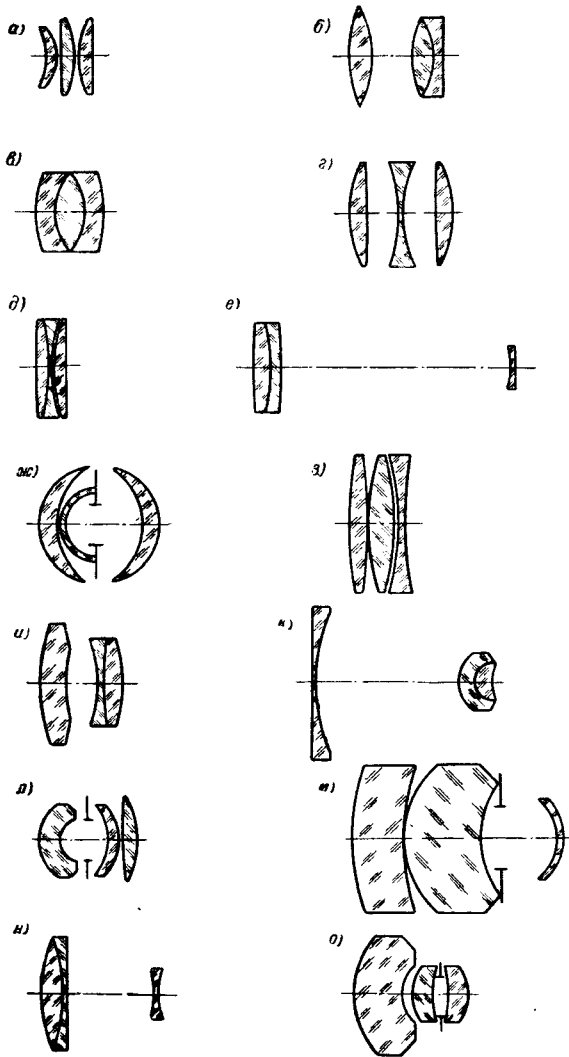
В этом отношении весьма интересны работы М. Берека — проведенное им исследование триплета и его подходы к использованию теории аббераций третьего порядка.

Так, в своей книге «Основы практической оптики (1930 г.) Берек писал: «... Сам Зейдель считал свою теорию аббераций третьего порядка неприменимой на практике ...»

«... кто ожидает путем решения некоторых уравнений получить в каждом случае непосредственно элементы конструкции для скорректированной системы, будет в большинстве случаев весьма разочарован. К сожалению, оценка аналитического разложения как своего рода расчетного автомата для неопытного напрашивается сама собою даже при чтении таких замечательных работ, как работы Шварцшильда».

«... нужно еще раз отметить, что значение зейделевской теории для практики нужно видеть не в том, что с ее помощью можно вычислять значения аббераций, это — злоупотребление, с которым оптика встречается время от времени уже в течение 70 лет, которое ведет к неудаче и дискредитированию теории».

Для возможности уменьшения влияния аббераций высших порядков Берек предлагает анализировать, кроме окончательных значений аббераций третьего порядка для всей системы, частичные коэффициенты тех же аббераций для отдельных поверхностей системы.



Фиг. 107. Трехлинзовые оптические системы:  
*a* — трехлинзовый конденсор; *б* — окуляр Кельнера; *в* — ортоскопическая лупа Штейнгеля; *г* — фотообъектив триплет; *д* — астрономический объектив (типа Тэйлора); *е* — объектив геодезической зрительной трубы с внутренней фокусировкой; *ж* — фотообъектив Руссар 1—19; *з* — объектив телескопической системы; *и* — фотообъектив Пантогональ; *к* — ортоскопический фотообъектив; *л* — фотообъектив с удлиненным задним отрезком; *м* — фотообъектив с укороченной длиной; *н* — галилеевская зрительная труба; *о* — фотообъектив — упрощенный Плазмат.

Г. Г. Слюсарев (1937 г.), проводя исследование двухлинзового склеенного объектива на основе теории aberrаций третьего порядка, также дает поправочные выражения для учета влияния aberrаций высших порядков.

В заключение обзора развития методов расчета оптических систем следует еще раз подчеркнуть, что решающее значение в деле расчета оптики имеет выбор типа системы и методика развития типа разрабатываемой системы.

Тип оптической системы еще не определяется числом линз, входящих в ту или иную оптическую конструкцию; так, например, оперируя числом линз, равным трем, можно привести ряд разнообразных оптических систем различного назначения, имеющих различные оптические характеристики; некоторые из них приведены на фиг. 107.

Конструкции фотографических объективов, приведенные на фиг. 107 (*г, ж, к, о*), могут быть скорректированы на все зейделевские aberrации третьего порядка; однако эти системы имеют различные свойства и коррекционные возможности, которые не могут быть исследованы на основе теории aberrаций третьего порядка.

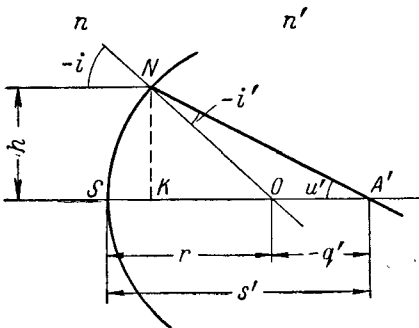
## Глава XIV

### АНАЛИЗ СВОЙСТВ ОТДЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

#### § 49. Анализ сферической aberrации одной преломляющей сферической поверхности при различных положениях предмета

Дать точную формулу, связывающую величину сферической aberrации, положение предмета и величину апертурного угла или высоту падения луча на поверхность в общем виде, практически не представляется возможным; поэтому обычно приходится прибегать к изучению сферической aberrации в области, рассматриваемой теорией aberrаций третьего порядка.

Вместо этого рассмотрим сферическую aberrацию во всей области ее существования, ограничившись лишь несколькими частными случаями, что даст возможность судить о поведении сферической aberrации при любом положении предмета.



Фиг. 108. Преломление на сферической поверхности луча, идущего от бесконечно удаленной точки.

Обратимся к случаю предмета, лежащего в бесконечности (фиг. 108);  $n$  и  $n'$  — показатели преломления среды до и после преломляющей поверхности;  $r$  — радиус кривизны преломляющей поверхности;

падающий луч параллелен оси и встречается с поверхностью в точке  $N$ , составляя угол  $i$  с нормалью;  $i'$  — угол преломленного луча с нормалью;  $u'$  — угол преломленного луча с осью.

Высота падения луча равна  $h$ ; отрезок от вершины  $S$  поверхности до точки пересечения  $A'$  преломленного луча с осью равен  $s'$ ; расстояние от этой точки до центра поверхности  $O$  обозначим через  $q'$ .

Из треугольника  $NKO$  (фиг. 108) следует

$$-r \sin i = h, \quad (641)$$

откуда

$$\sin i = -\frac{h}{r}; \quad (642)$$

из треугольника  $ONA'$ :

$$-r \sin i' = -q' \sin u'; \quad (643)$$

кроме того, имеет место

$$-i = -i' + u', \quad (644)$$

откуда

$$u' = i' - i. \quad (645)$$

По закону преломления

$$n \sin i = n' \sin i'; \quad (646)$$

из формулы (643) следует

$$-q' = -r \frac{\sin i'}{\sin u'} = -\frac{\sin i'}{\sin i' \cos i - \sin i \cos i'} r \quad (647)$$

или

$$-q' = \frac{r}{\frac{\sin i}{\sin i'} \cos i' - \cos i} = \frac{r}{\frac{n'}{n} \cos i' - \cos i}, \quad (648)$$

и, выражая косинусы  $i$  и  $i'$  через синусы этих же углов,

$$-q' = \frac{r}{\frac{n'}{n} \sqrt{1 - \sin^2 i'} - \sqrt{1 - \sin^2 i}} = \frac{r}{\sqrt{\frac{n'^2}{n^2} - \frac{h^2}{r^2}} - \sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2}}}, \quad (649)$$

избавляясь от иррациональности в знаменателе, окончательно получим:

$$-q' = \frac{\sqrt{\frac{n'^2}{n^2} - \frac{h^2}{r^2}} + \sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2}}}{\frac{n'^2}{n^2} - 1} r. \quad (650)$$

Из фиг. 108 нетрудно найти величину  $s'$ :

$$s' = r - q' = \left[ 1 + \frac{\sqrt{\frac{n'^2}{n^2} - \frac{h^2}{r^2}} + \sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2}}}{\frac{n'^2}{n^2} - 1} \right] r. \quad (651)$$

Определим величину  $s'_{III}$  в области аббераций третьего порядка, пренебрегая степенями  $\frac{h}{r}$  выше третьей. Находим:

$$s'_{III} = \left[ 1 + \frac{\frac{n'}{n} \left( 1 - \frac{n^2 h^2}{2n'^2 r^2} \right) + 1 - \frac{h^2}{2r^2}}{\frac{n'^2}{n^2} - 1} \right] r \quad (652)$$

или

$$s'_{III} = \frac{\frac{n'^2}{n^2} - 1 + \frac{n'}{n} + 1 - \frac{nh^2}{n' 2r^2} - \frac{h^2}{2r^2}}{\frac{n'^2}{n^2} - 1} r. \quad (653)$$

Полагая  $h = 0$ , определим отрезок  $s'_0$  для нулевого луча. Получаем:

$$s'_0 = \frac{\frac{n'^2}{n^2} - 1 + \frac{n'}{n} + 1}{\frac{n'^2}{n^2} - 1} r = \frac{n'r}{n' - n}. \quad (654)$$

Зная величину  $s'_0$ , нетрудно определить как истинную сферическую абберацию, так и сферическую абберацию третьего порядка:

$$\Delta s' = \frac{\sqrt{\frac{n'^2}{n^2} - \frac{h^2}{r^2}} + \sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2} - \frac{n'}{n} - 1}}{\frac{n'^2}{n^2} - 1} r; \quad (655)$$

$$\Delta s'_{III} = - \frac{n^2}{n'^2 \left( 1 - \frac{n'}{n} \right)} \cdot \frac{h^2}{2r}. \quad (656)$$

Можно составить отношение сферической абберации к величине  $s'_0$  деля формулы (655) и (656) на формулу (654):

$$\frac{\Delta s'}{s'_0} = \frac{\sqrt{\frac{n'^2}{n^2} - \frac{h^2}{r^2}} + \sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2} - \frac{n'}{n} - 1}}{\frac{n'}{n} \left( \frac{n'}{n} + 1 \right)}; \quad (657)$$

$$\frac{\Delta s'_{III}}{s'_0} = - \frac{n^2}{n'^2} \cdot \frac{h^2}{2r^2}. \quad (658)$$

Наличие в формулах (651), (655) и (657) квадратных корней показывает, что существование преломленного поверхностью луча, а следовательно, и реальной сферической абберации ограничено значениями отношения

$$\frac{h^2}{r^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{h^2}{r^2} = \frac{n'^2}{n^2}. \quad (659)$$

Первое из соотношений в формуле (659) определяет возможность встречи луча с поверхностью, второе — возможность преломления луча на поверхности, если  $n' < n$ .

Формулы (656) и (658), дающие возможность найти величину аббераций третьего порядка, не ограничивают величину отношения  $\frac{h}{r}$ .

Определим порядок величин реальной сферической абберации в граничных случаях.

Рассмотрим характерные случаи:

1)  $n = 1$ ;  $n' = 1,5$ ;

2)  $n = 1$ ;  $n' = 2,0$ ;

3)  $n = 1,5$ ;  $n' = 1,6$ .

Первые два случая характеризуют величины граничной сферической абберации почти во всем диапазоне воздух — стекло; третий случай характеризует поведение граничной сферической абберации на поверхности склейки.

Аналогично рассмотрим преломление луча из стекла в воздух:

4)  $n = 1,5$ ;  $n' = 1$ ;

5)  $n = 2,0$ ;  $n' = 1$ ,

и из среды с большим показателем в среду с меньшим показателем:

6)  $n = 1,6$ ;  $n' = 1,5$ .

Для всех шести случаев определим также сферическую абберацию третьего порядка с тем, чтобы иметь возможность суждения о порядке граничных величин расхождения между реальной сферической абберацией и сферической абберацией третьего порядка.

Результаты определения граничных аббераций даны в табл. 14.

Таблица 14

$n$	$n'$	$h:r$	$\Delta s' : s'_0$	$\Delta s'_{III} : s'_0$	$(\Delta s' - \Delta s'_{III}) : s'_0$
1,0	1,5	1,0	-0,378	-0,222	-0,156
	2,0		-0,211	-0,125	-0,086
1,5	1,6		-0,770	-0,438	-0,332
1,5	1,0	$\frac{2}{3}$	-0,823	-0,500	-0,323
2,0		$\frac{1}{2}$	-0,845	-0,500	-0,345
1,6	1,5	0,938	-0,780	-0,500	-0,280

Из рассмотрения трех первых случаев, приведенных в табл. 14 и характеризующих преломление луча из среды с меньшим показателем преломления в среду с большим показателем преломления, нетрудно прийти к выводу, что наибольшее значение отношения вели-

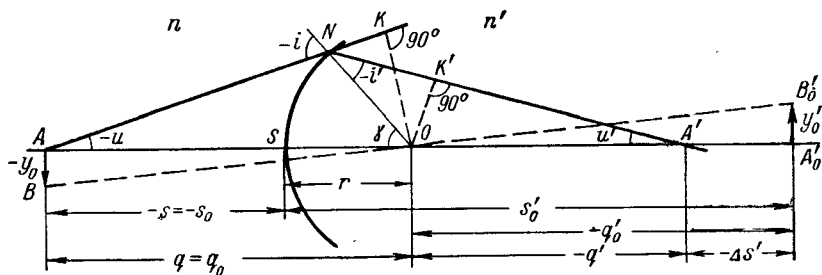
чины сферической aberrации к величине последнего отрезка  $s'_0$  имеет место при малой разности показателей преломления. В этом случае наблюдается наибольшее расхождение между действительной сферической aberrацией и сферической aberrацией третьего порядка.

Наоборот, три последних случая, характеризующих преломление луча из среды с большим показателем преломления в среду с меньшим показателем преломления, дают почти одинаковые значения отношения сферической aberrации к последнему отрезку и почти одинаковые расхождения между реальной сферической aberrацией и сферической aberrацией третьего порядка.

Величины сферической aberrации в трех последних случаях значительно превышают величины сферической aberrации в трех первых случаях.

### § 50. Сферическая aberrация одной преломляющей поверхности в зависимости от положения предмета

Рассмотрим общий случай преломления луча на сферической поверхности (фиг. 109). На фигуре  $O$  — центр преломляющей поверхности радиуса  $r$ ;  $S$  — вершина поверхности;  $N$  — точка преломления действительного луча  $ANA'$ , составляющего углы  $u$  и  $u'$  с осью и углы



Фиг. 109. Преломление луча на сферической поверхности. Общий случай.

$i$  и  $i'$  с нормалью  $ON$ ;  $n$  и  $n'$  — показатели преломления сред, разделяемых поверхностью;  $y_0$  и  $y'_0$  — предмет и его изображение, полученное по формулам оптики нулевых лучей, расположенные в точках  $A$  и  $A'_0$ .

Расстояние между точками  $A'_0$  и  $A'$  определяет величину сферической aberrации  $\Delta s'$ .

Из треугольников  $AOK$  и  $NOK$  следует:

$$OK = -r \sin i = -q \sin u. \quad (660)$$

Аналогично из треугольников  $A'OK'$  и  $NOK'$  получаем:

$$OK' = -r \sin i' = -q' \sin u'. \quad (661)$$

Умножая формулу (660) на  $n$  и формулу (661) на  $n'$  находим, пользуясь законом преломления:

$$nq \sin u = n'q' \sin u'. \quad (662)$$



Определим увеличение  $V_0$  по формулам оптики нулевых лучей для точек  $A'_0$  и  $A$ . Имеем на основании подобия треугольников  $AOB$  и  $A'OB'_0$ :

$$V_0 = \frac{y'_0}{y_0} = \frac{q'_0}{q_0}. \quad (663)$$

Обратимся к инварианту Аббе:

$$n' \left( \frac{1}{s'_0} - \frac{1}{r} \right) = n \left( \frac{1}{s_0} - \frac{1}{r} \right); \quad (664)$$

перенеся члены, содержащие  $r$ , в правую часть формулы, находим:

$$\frac{n'}{s'_0} - \frac{n}{s_0} = \frac{n' - n}{r}. \quad (665)$$

Приведа выражения в скобках в формуле (664) к одному знаменателю, получим:

$$\frac{n'q'_0}{s'_0} = \frac{nq_0}{s_0}, \quad (666)$$

откуда следует

$$V_0 = \frac{n}{n'} \frac{s'_0}{s_0}; \quad (667)$$

пользуясь формулами (667) и (665), исключим  $s'_0$ . Находим:

$$\frac{n}{s_0} \left( \frac{1}{V_0} - 1 \right) = \frac{n' - n}{r}; \quad (668)$$

далее

$$s_0 = \frac{nr}{n' - n} \left( \frac{1}{V_0} - 1 \right) = r - q_0, \quad (669)$$

откуда нетрудно определить величину  $q_0$ :

$$q_0 = \left[ 1 - \frac{n}{n' - n} \left( \frac{1}{V_0} - 1 \right) \right] r = \frac{n' - \frac{n}{V_0}}{n' - n} \cdot r. \quad (670)$$

Определим величину  $q'_0$ . Из формулы (663) следует:

$$q'_0 = V_0 q_0 = \frac{V_0 n' - n}{n' - n} r; \quad (671)$$

имея в виду, что  $q = q_0$ , можно определить  $\sin u$ , пользуясь формулой (670):

$$\sin u = \frac{r \sin i}{q} = \frac{n' - \frac{n}{V_0}}{n' - n} \sin i. \quad (672)$$

Угол  $u'$  легко находится из фиг. 109:

$$u' = u - i + i' = u + \Delta i; \quad (673)$$

пользуясь формулой (661), определяем отрезок  $q'$

$$q' = \frac{n}{n'} \frac{\sin i}{\sin u'} r. \quad (674)$$

Составляя разность  $q'_0$  и  $q'$ , находим продольную сферическую абберацию  $\Delta s'$ :

$$\Delta s' = q'_0 - q'. \quad (675)$$

Формулы (671)—(675) позволяют определить сферическую абберацию для любых увеличений; кроме того, эти формулы дают возможность определять сферическую абберацию при заданных величинах углов падения.

При этом заранее могут быть вычислены величины

$$\left. \begin{aligned} \Delta n \cdot \sin i &= (n' - n) \sin i \\ \Delta i &= i' - i \\ \frac{n}{n'} r \sin i \\ \frac{r}{n' - n} &= \frac{f'_0}{n'} \end{aligned} \right\} \quad (676)$$

Рассмотрим следующие значения увеличений.

1)  $V = 1$ . В этом случае  $q = r$ ;  $\sin u = \sin i$ ;  $u' = i'$  и на основании формулы (661)  $q' = r$ .

Случай соответствует размещению предмета и изображения в вершине преломляющей поверхности и дает равенство сферической абберации нулю при любых возможных значениях углов падения и преломления.

2)  $V = \frac{n}{n'}$ . В этом случае  $q$  получается равным нулю, что приводит к равенству нулю величин  $q'$  и  $q'_0$ , а следовательно, и сферической абберации  $\Delta s'$  при любых возможных значениях углов  $u$ . Это соответствует размещению предмета и изображения в центре преломляющей поверхности.

3)  $V = \frac{n^2}{n'^2}$ . Этот случай дает нам величину  $q'_0$ , равную

$$q'_0 = \frac{n' \left( \frac{n}{n'} \right)^2 - n}{n' - n} r = - \frac{n}{n'} r,$$

величину  $\sin u$ , равную

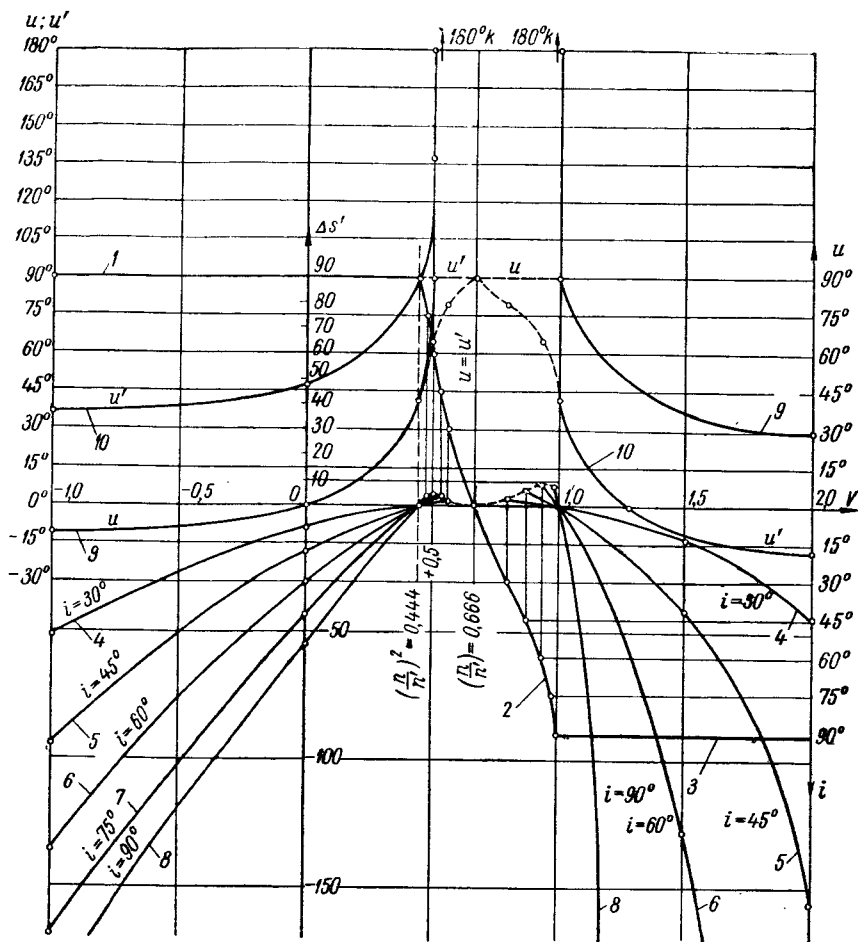
$$\sin u = - \frac{n}{n'} \sin i = - \sin i';$$

величина  $u'$  получается равной  $-i$  и величина  $q' = - \frac{n}{n'} r$ .

Таким образом, при размещении предмета и изображения в апланатических точках сферической поверхности полностью отсутствует сферическая абберация при любых возможных значениях апертурных углов и углов падения и преломления луча.

Рассмотрев поведение сферической абберации для увеличений в промежутках между исследованными корнями и вне этих промежутков, получим картину изменения действительной сферической абберации во всей области ее существования.

Ставя вопрос о границах существования реальной сферической aberrации, мы видим, что параметром, определяющим возможность существования реальной сферической aberrации, будет граничное значение угла полного внутреннего отражения или углов падения и преломления луча для этого граничного случая.



Фиг. 110. Изменение сферической aberrации сферической преломляющей поверхности при изменении положения предмета.

Явление полного внутреннего отражения ограничивает существование сферической aberrации для увеличений от  $V = -\infty$  до  $V = \frac{n^2}{n'^2}$  и от  $V = 1$  до  $V = +\infty$ ; в диапазоне от  $V = \frac{n^2}{n'^2}$  до  $V = 1$  (от апланатических точек до вершины поверхности) область существования может быть ограничена равенством  $90^\circ$  одного из апертурных углов

$u$  или  $u'$ . Поэтому целесообразно рассматривать сферическую абберацию как функцию углов падения на преломляющей поверхности и увеличения, даваемого поверхностью.

При таком рассмотрении область существования сферической абберации, заданная функцией  $i = f(V)$  в интервалах от  $V = -\infty$  до  $V = \frac{n^2}{n'^2}$  и от  $V = 1$  до  $V = +\infty$  будет ограничена прямыми 1 и 3, параллельными оси абсцисс, если за ось абсцисс принять ось увеличений, а за ось ординат — ось углов падения  $i$  (фиг. 110).

Таблица 15

$V$	$\Delta s'$					
	$i = 90^\circ$	$i = 75^\circ$	$i = 60^\circ$	$i = 45^\circ$	$i = 30^\circ$	$i = 0^\circ$
— 1,000	— 194,2	— 170,1	— 137,2	— 95,0	— 51,7	—
— 0,500	—	—	—	—	—	—
— 0,000	— 55,25	— 43,7	— 31,1	— 18,9	— 8,9	—
— 0,444	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	—
0,478	—	3,9	—	—	—	—
0,506	—	—	4,77	—	—	—
0,535	—	—	—	3,87	—	—
0,570	—	—	—	—	2,17	—
0,667	—	—	—	—	—	0,000
0,800	—	—	—	—	3,04	—
0,872	—	—	—	6,17	—	—
0,938	—	—	8,9	—	—	—
0,983	—	8,25	—	—	—	—
1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1,500	+ 1295	— 3565	— 128,0	— 40,2	— 12,8	—
2,000	+ 306,7	+ 508,0	— 1675,0	— 155,0	— 43,5	—

В интервале же от  $V = \frac{n^2}{n'^2}$  до  $V = 1$  область существования сферической абберации ограничена некоторой кривой 2, заданной функцией  $i = f(V)$  и пересекающей ось абсцисс в точке, для которой  $V = \frac{n}{n'}$  (центр преломляющей поверхности).

Задаваясь постоянными значениями углов падения  $i$  и откладывая по оси ординат значения сферической абберации  $\Delta s'$ , вычисленные для различных увеличений  $V$ , можно построить семейство кривых 4—8 для сферической абберации при различных  $i$ . Эти кривые пересекаются друг с другом и с осью абсцисс в точках  $V = \frac{n^2}{n'^2}$  и  $V = 1$ ; в интервале же между этими точками кривые обрываются, доходя

до некоторой граничной кривой, начинающейся в точке  $V = \frac{n^2}{n'^2}$ , касающейся оси абсцисс в точке  $V = \frac{n}{n'}$  и обрывающейся при  $V = 1$ .

В этом же интервале сферическая aberrация при  $n < n'$  сравнительно невелика и принимает только положительные значения. Вне этого интервала сферическая aberrация изменяет знак на обратный, переходя при тех же значениях показателей преломления в область отрицательных значений и начинает быстро расти; затем, начиная с некоторого момента, кривые изменения сферической aberrации претерпевают разрывы непрерывности, переходя через бесконечность.

На фиг. 110 кривые 9 и 10, графически выражающие зависимости  $u = f(V)$  и  $u' = f(V)$ , позволяют определить граничные значения апертурных углов  $u$  и  $u'$  [пунктирные участки кривых 9 и 10 получены при введении ограничения для углов  $u$  и  $u'$ , равного  $90^\circ$ , в диапазоне  $\left(\frac{n}{n'}\right)^2 < V < 1$ ].

В табл. 15 приведены изменения сферической aberrации для различных увеличений и углов падения  $i$  для случая  $n = 1$  и  $n' = 1,5$ .

### § 51. Сферическая aberrация плоскости и плоскопараллельной пластинки

Рассмотрение сферической aberrации плоскости для случая преломления из стекла в воздух и плоскопараллельной пластинки может быть объединено путем размещения предметной точки  $A$  на первой поверхности плоскопараллельной пластинки (фиг. 111).

На фиг. 111  $n_1 = n_3 = 1$ ;  $n_2 = n$ ; толщина пластинки  $d$  равна предметному отрезку  $s_2$  для второй плоскости. Получаем:

$$\left. \begin{aligned} -i_2' &= -i_1 = -u_3 = -u_1 \\ -i_1' &= -u_2 = -i_2 \end{aligned} \right\} \quad (677)$$

Нетрудно определить высоту на второй поверхности  $h_2$ . Действительно

$$h_2 = -d \operatorname{tg} u_2 = s_2' \operatorname{tg} u_3, \quad (678)$$

откуда

$$s_2' = -\frac{\operatorname{tg} u_2}{\operatorname{tg} u_3} d. \quad (679)$$

На основании закона преломления следует:

$$n \sin u_2 = \sin u_3 = \sin u_1; \quad (680)$$

пользуясь этой формулой, выражение (679) можно преобразовать:

$$s_2' = -\frac{\cos u_1}{\cos u_2} \cdot \frac{d}{n}. \quad (681)$$

В случае малости углов  $u_1$  и  $u_2$  отношение их косинусов обращается в единицу, а отрезок  $s_2$  переходит в  $s_{02}'$ . Таким образом,

$$s_{02}' = -\frac{d}{n}. \quad (682)$$

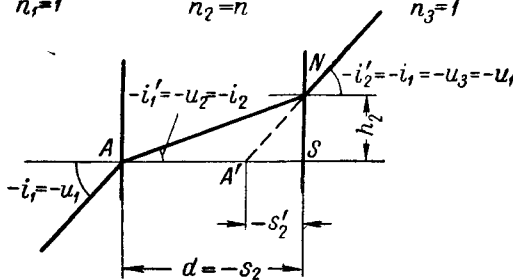
Составляя разность отрезков  $s'_2$  и  $s'_{02}$ , находим величину сферической aberrации плоскопараллельной пластинки:

$$\Delta s' = s'_2 - s'_{02} = \left(1 - \frac{\cos u_1}{\cos u_2}\right) \frac{d}{n} \quad (683)$$

и, пользуясь формулой (680), окончательно находим:

$$\Delta s' = \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 u_1}{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 u_1}}\right) \frac{d}{n} = \left[1 - n \sqrt{\frac{1 - \sin^2 u_1}{n^2 - \sin^2 u_1}}\right] \frac{d}{n}. \quad (684)$$

С возрастанием угла  $u_1$  сферическая aberrация плоскопараллельной пластинки возрастает и приобретает наибольшее возможное значение при  $u_1 = 90^\circ$  и  $\sin u_1 = 1$ .



Фиг. 111. Плоскопараллельная пластинка.

Тогда

$$\Delta s'_{\max} = \frac{d}{n} \quad (685)$$

наибольшая величина сферической aberrации плоскопараллельной пластинки равна «редуцированной» (приведенной к воздуху) толщине  $d$  пластинки.

Сферическая aberrация плоскопараллельной пластинки в воздухе всегда положительна.

## § 52. Сферическая aberrация на оси отдельной линзы в воздухе

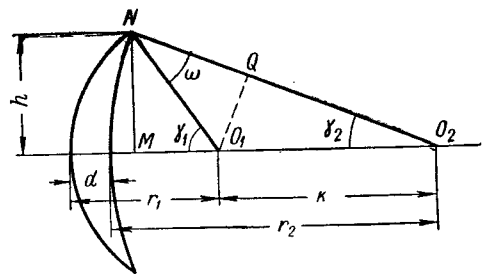
Величина сферической aberrации отдельной линзы в воздухе является функцией следующих параметров: формы («прогиба») линзы; увеличения, при котором работает линза; толщины линзы; показателя преломления.

Случай, когда линза ограничивается поверхностями несферической формы, будет рассмотрен ниже.

Фокусное расстояние линзы, играющее роль масштаба, условимся считать постоянным; поверхности линзы предполагаются сферическими.

Рассмотрение работы отдельной линзы в воздухе начнем с изучения влияния формы (прогиба) линзы, предполагая увеличение, при котором работает линза, постоянным и равным 1.

Изменение формы линзы для этого случая должно дать симметричную зависимость для изменения сферической aberrации относительно симметричной формы линзы.



Фиг. 112. Нахождение острого края линзы.

Установим физическую сущность изменения сферической аберрации в зависимости от прогиба линзы.

Для этой цели рассмотрим преломление луча на остром крае линзы, обладающей конечной толщиной.

На фиг. 112  $O_1$  и  $O_2$  — центры первой и второй поверхностей линзы;  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы этих поверхностей;  $d$  — толщина линзы;  $h$  — расстояние острого края линзы от оси;  $k$  — расстояние между центрами поверхностей;  $\gamma_1$  — угол с осью нормали к первой поверхности в точке  $N$  острого края;  $\gamma_2$  — угол с осью нормали ко второй поверхности в той же точке;  $\omega$  — преломляющий угол линзы на остром крае, равный углу между этими нормальями.

Из фиг. 112 следует

$$k + r_1 = r_2 + d, \quad (686)$$

откуда

$$k = r_2 - r_1 + d. \quad (687)$$

Из треугольников  $NMO_1$  и  $NMO_2$  следует:

$$h = r_1 \sin \gamma_1 = r_2 \sin \gamma_2. \quad (688)$$

Величина расстояния  $k$  между центрами обеих поверхностей равна

$$k = r_2 \cos \gamma_2 - r_1 \cos \gamma_1. \quad (689)$$

Опуская перпендикуляр из точки  $O_1$  на нормаль  $NO_2$ , получаем

$$r_1 \sin \omega = k \sin \gamma_2 \quad (690)$$

и, пользуясь формулой (688), находим:

$$\sin \omega = \frac{k}{r_1} \sin \gamma_2 = \frac{kh}{r_1 r_2}, \quad (691)$$

или, раскрывая выражение для  $k$  на основании формулы (686), находим окончательно:

$$\sin \omega = \frac{r_2 - r_1 + d}{r_1 r_2} h = \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{d}{r_1 r_2} \right] h. \quad (692)$$

Напишем выражение для оптической силы линзы конечной толщины для области нулевых лучей, которое нетрудно получить из формулы (172) или (178), полагая углы  $\beta = 0$ :

$$\varphi = \frac{1}{f'} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{d(n-1)^2}{n r_1 r_2}, \quad (693)$$

откуда

$$\frac{\varphi}{n-1} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{d}{r_1 r_2} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{d}{r_1 r_2} - \frac{d}{n r_1 r_2}. \quad (694)$$

Сопоставляя выражения (694) и (692), можно написать:

$$\frac{\varphi}{n-1} = \frac{\sin \omega}{h} - \frac{d}{n r_1 r_2}, \quad (695)$$

откуда

$$\sin \omega = \left[ \frac{\varphi}{n-1} + \frac{d}{n r_1 r_2} \right] h. \quad (696)$$

Величины  $\varphi$ ,  $n$  и  $d$  для всего множества форм линзы являются постоянными; величины же  $r_1$ ,  $r_2$  определяют прогиб линзы; величина  $h$  несколько изменится при изменении прогиба.

При сопоставлении величины переменного члена  $\frac{d}{nr_1r_2}$  с величиной постоянного члена  $\frac{\varphi}{n-1}$  видно, что переменный член в случае равенства одного из радиусов линзы бесконечности обращается в нуль; в других случаях он отличен от нуля, но будет мал по сравнению с постоянным членом.

Если принять толщину  $d$  равной 10% от фокусного расстояния и рассмотреть линзу двояковыпуклой формы с равными радиусами, то при условии, что фокусное расстояние  $f' = 100$  мм, получим:

$$\varphi = \frac{1}{100} = (n-1) \frac{2}{r} - \frac{d}{n} \frac{(n-1)^2}{r^2};$$

полагая  $n = 1,5$  и  $d = 0,1f' = 10$  мм, получаем:

$$\varphi = \frac{1}{100} = \frac{1}{r} - \frac{2,5}{1,5r^2} = \frac{1}{r} - \frac{10}{6r^2},$$

откуда

$$\frac{1}{r^2} - \frac{3}{5r} + \frac{6}{1000} = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение относительно  $\frac{1}{r}$ , находим:

$$\frac{1}{r} = 0,3 \pm \sqrt{0,09 - 0,006} = 0,3 \pm \sqrt{0,084}.$$

Для радиуса  $r$  получим, беря больший корень, значение  $r = 98,3062$ .

Величина  $\frac{\varphi}{n-1}$  будет равна  $\frac{\varphi}{n-1} = \frac{0,01}{1,5-1} = 0,02$ .

Определим величину переменного члена  $\frac{d}{nr_1r_2}$ :

$$-\frac{d}{nr^2} = \frac{10}{1,5 \cdot 98,3062^2} = 0,0006898.$$

Составим отношение переменного и постоянного членов друг к другу. Получаем:

$$-\frac{d}{nr^2} \cdot \frac{n-1}{\varphi} = \frac{10 \cdot 50}{1,5 \cdot 98,3^2} \approx \frac{1}{28,8} \approx 0,035;$$

в этом случае величина переменного члена в диапазоне от  $r_1 = \infty$  до  $r_2 = \infty$  при  $d = 10$  мм не превосходит 3,5% от величины постоянного члена.

Определим высоту  $h$  до острого края. Из прямоугольного треугольника (фиг. 113), образованного радиусом  $r$ , отрезком  $r - \frac{d}{2}$  и высотой до острого края  $h$ , находим:

$$h = \sqrt{r^2 - \left(r - \frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{rd - \frac{d^2}{4}}$$

и численно

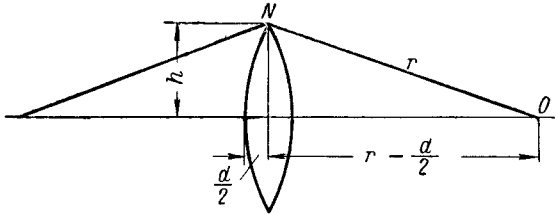
$$h = 10 \sqrt{9,83 - 0,25} = 30,9526,$$



Определим синус преломляющего угла на остром крае линзы:

$$\sin \omega = (0,02 - 0,0006898) 30,9526 = 0,5977.$$

Обратимся к линзе плоско-выпуклой формы. При том же фокусном расстоянии  $f' = 100$  мм и толщине  $d = 10$  мм находим, что величина  $h$  до острого края определится как малый катет египетского треугольника с гипотенузой, равной радиусу, составляющему половину фокусного расстояния.



Фиг. 113. Симметричная линза.

Высота  $h$  острого края равна 30 мм и величина синуса преломляющего угла линзы на остром крае равна

$$\sin \omega = \frac{\varphi h}{n-1} = \frac{0,01 \cdot 30}{0,5} = 0,6000.$$

Величина синуса преломляющего угла линзы на ее остром крае меняется при переходе от двояковыпуклой формы к плоско-выпуклой всего лишь на 0,3%, т. е. сохраняется постоянной.

Рассмотрим линзу менiscoобразной формы с отношением радиусов, равным 2, т. е.  $r_2 = 2r_1$ .

Пользуясь формулой (694), вычислим величину  $r_1$ , полагая  $d = 10$  мм, силу линзы  $\varphi = 0,01$  и  $n = 1,5$ :

$$\frac{\varphi}{n-1} = 0,02 = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{2r_1} + \frac{d(n-1)^2}{2nr_1^2}.$$

Составляя квадратное уравнение для  $\frac{1}{r_1}$ , находим:

$$\frac{1}{r_1^2} + 0,3 \frac{1}{r_1} - 0,012 = 0$$

и для кривизны  $\frac{1}{r_1}$

$$\frac{1}{r_1} = -0,15 \pm \sqrt{\frac{0,09}{4} + 0,012},$$

откуда

$$r_1 = \frac{1}{0,15(\sqrt{1,534} - 1)} \approx 28 \approx \frac{r_2}{2}.$$

Вычислим величину высоты  $h$ . На основании фиг. 114 можно написать

$$h = \sqrt{r_1^2 - a^2} = \sqrt{r_2^2 - (a+k)^2}. \quad (697)$$

Из этого уравнения можно определить величину  $a$ :

$$a = \frac{1}{2k} [r_2^2 - r_1^2 - k^2]; \quad (698)$$

подставляя величину  $a$  в формулу (697), находим высоту  $h$  до острого края:

$$h = \sqrt{r_1^2 - \frac{1}{4k^2} (r_2^2 - r_1^2 - k^2)^2}. \quad (699)$$

Пользуясь формулами (699) и (696), можно получить общее выражение для синуса преломляющего угла на остром крае линзы:

$$\sin \omega = \left[ \frac{\varphi}{n-1} + \frac{d}{nr_1 r_2} \right] \sqrt{r_1^2 - \left[ \frac{r_2^2 - r_1^2 - (r_2 - r_1 + d)^2}{2(r_2 - r_1 + d)} \right]^2}. \quad (700)$$

Возвращаясь к рассматриваемому примеру, находим высоту

$$h = \sqrt{28^2 - \frac{1}{4 \cdot 38^2} (56^2 - 28^2 - 38^2)^2} = 25,3$$

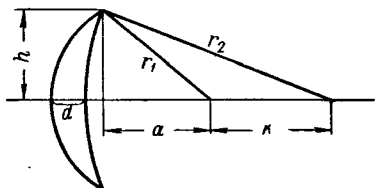
и преломляющий угол

$$\sin \omega = \left( 0,02 + \frac{10}{3 \cdot 28^2} \right) 25,3 = 0,614.$$

В случае равных радиусов одного и того же знака, величина синуса преломляющего угла станет равной 0,714.

Зависимость синуса преломляющего угла на остром крае линзы от ее формы показана на фиг. 115.

Кривая изменения синуса преломляющего угла имеет минимум в точке, соответствующей линзе симметричной формы, и незначительно увеличивается до точек, соответствующих линзам плоско-выпуклых форм. В связи с этим в сравнительно широком диапазоне линз различных форм их преломляющий угол на остром крае сохраняется постоянным.



Фиг. 114. Линза с острым краем.

При переходе от двояковыпуклой формы линз к менiscoобразной уменьшается высота линзы на ее остром крае.

Для установления зависимости между величиной преломляющего угла и углом отклонения луча при изменении хода преломляемого луча наиболее удобно составить таблицу углов преломления в зависимости от углов падения при показателе преломления стекла, равном  $n = 1,5$ .

В табл. 16 приведены значения углов падения и преломления  $i$  и  $i'$ , а также разности углов падения и преломления  $\Delta i$ .

Рассмотрим преломление луча призмой с преломляющим углом, равным  $\omega$ . На фиг. 116 показан ход луча, образующего углы  $i_1$  и  $i_1'$  при преломлении на первой грани призмы и углы  $i_2$  и  $i_2'$  на второй грани; угол между обеими гранями призмы примем равным  $\omega$ .

Таблица 16

$i$	$i'$	$\Delta i$
1°	1°30'00"	0°30'00"
2	3 00 00	1 00 00
3	4 30 10	1 30 10
4	6 00 20	2 00 20
5	7 30 40	2 30 40
6°	9°01'20"	3°01'20"
7	10 32 00	3 32 00
8	12 03 00	4 03 00
9	13 34 20	4 34 20
10	15 05 50	5 05 50
11°	16°37'50"	5°37'50"
12	18 10 20	6 10 20
13	19 43 10	6 43 10
14	21 16 40	7 16 40
15	22 50 40	7 50 40
16°	24°25'20"	8°25'20"
17	26 00 40	9 00 40
18	27 36 50	9 36 50
19	29 14 00	10 14 00
20	30 52 00	10 52 00
21°	32°31'00"	11°31'00"
22	34 11 20	12 11 20
23	35 52 50	12 52 50
24	37 35 50	13 35 50
25	39 20 30	14 20 30
26°	41°06'50"	15°06'50"
27	42 55 10	15 55 10
28	44 46 00	16 46 00
29	46 39 10	17 39 10
30	48 35 30	18 35 30

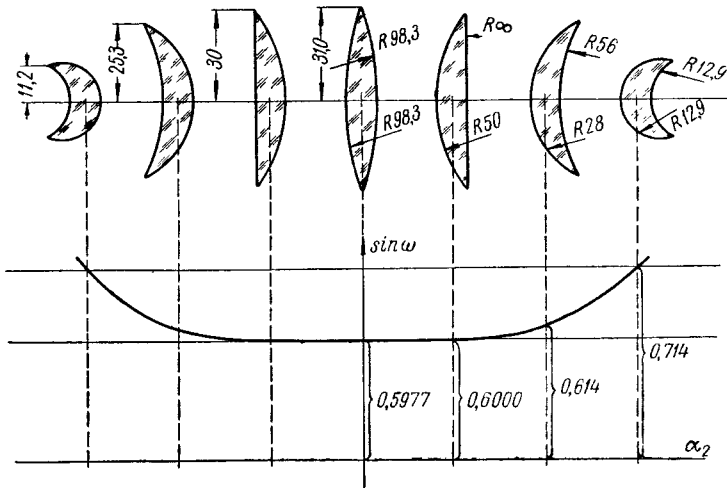
$i$	$i'$	$\Delta i$
31°	50°35'00"	19°35'00"
32	52 38 40	20 38 40
33	54 47 00	21 47 00
34	57 00 50	23 00 50
35	59 21 30	24 21 30
36°	61°50'40"	25°50'40"
37	64 31 10	27 31 10
38	67 26 30	29 26 30
39	70 43 50	31 43 50
40	74 37 10	34 37 10
41°	79°46'00"	38°46'00"

Из фигуры следует:

$$\omega = i_2 - i_1', \quad (701)$$

$$\varepsilon = -i_1' + i_1 + i_2' - i_2 = i_2' - i_2 - (i_1' - i_1), \quad (702)$$

где  $\varepsilon$  — угол создаваемого призмой отклонения луча.



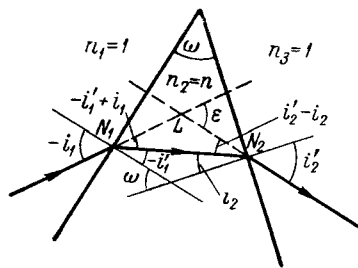
Фиг. 115. Изменение формы линзы.

Формула (702) показывает, что угол отклонения  $\varepsilon$  представляет собой разность углов отклонения на обеих преломляющих гранях

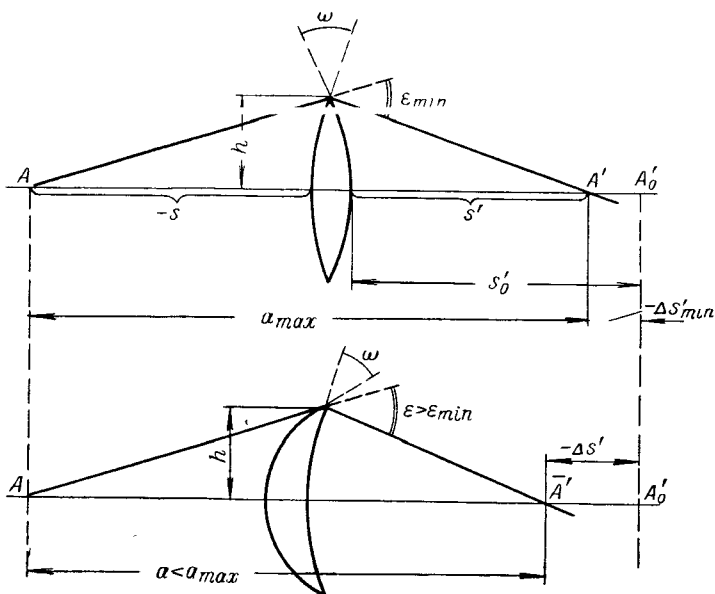
призмы; преломляющий угол призмы  $\omega$  определяется разностью углов  $i_2$  и  $i_1$ . Поэтому, беря из табл. 16 сумму или разность углов, равную  $\omega$  и составляя сумму или разность углов отклонения  $\epsilon$ , можно определить величину угла отклонения, даваемого призмой при выбранном ходе луча. Одновременно могут быть взяты углы луча с нормальными на входе и выходе луча из призмы.

Принимая согласно ранее рассмотренному численному примеру величину синуса преломляющего угла на остром крае линзы равной 0,5977, получаем для этого угла  $\omega$  величину, равную  $36^\circ 42'$ . Это позволит определить величину разности углов  $i_2$  и  $i_1$ :  $i_2 - i_1 = \omega = 36^\circ 42'$ .

Указанная разность углов может быть получена при разнообразных значениях одного из этих углов. Обращаясь к табл. 16, нетрудно установить, что при этом величина угла отклонения  $\epsilon$  приобретает различные значения.



Фиг. 116. Призма, работающая с минимальным углом отклонения.

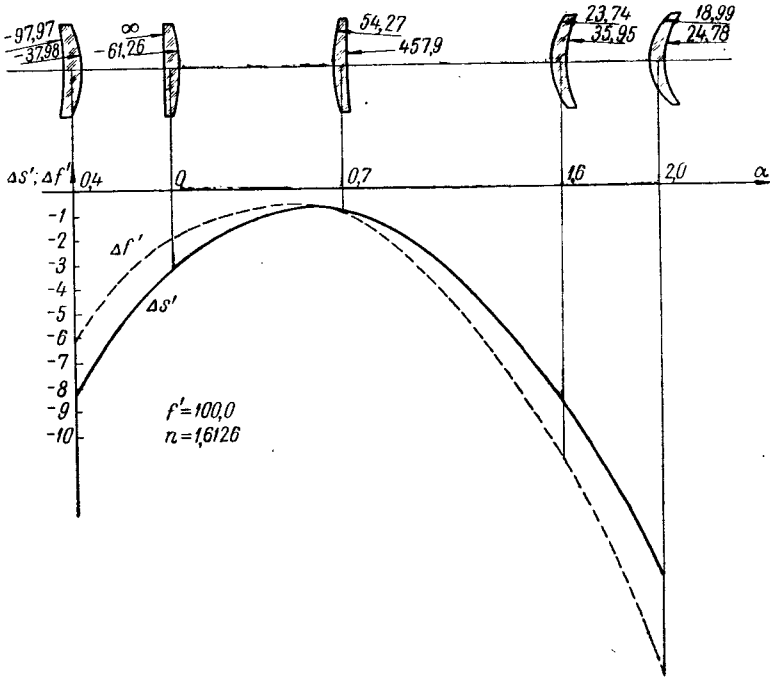


Фиг. 117. Вывод связи угла отклонения луча острым краем линзы с величиной продольной сферической aberrации.

Наименьшая величина угла отклонения  $\epsilon$  будет в том случае, когда углы  $i_2$  и  $i_1'$  равны друг другу по абсолютной величине и обратны по знаку.

Такой случай представляет собой работу призмы в минимуме угла отклонения.

Как было установлено выше, преломляющий угол на остром крае линзы, имеющей постоянную силу, сохраняется постоянным так же, как и высота до острого края, поэтому расстояние от предметной точки до точки пересечения с осью луча, преломленного на остром крае линзы, изменяется в зависимости от изменения угла отклонения.



Фиг. 118. Сферическая aberrация мениска.

Изменение этого расстояния (фиг. 117) определит изменение величины сферической aberrации; минимум угла отклонения луча на остром крае соответствует минимуму продольной сферической aberrации для данного положения предмета.

На фиг. 118 показано изменение сферической aberrации для случая, когда предмет расположен в бесконечности, для различных прогибов простой положительной линзы в воздухе.

Подобная картина изменения сферической aberrации, в зависимости от изменения формы линзы, с достаточно хорошей точностью может быть получена и приближенным способом с помощью теории aberrаций третьего порядка.

На той же фиг. 118 пунктиром показана кривая для изменения отступления от условия синусов  $\Delta f'$ ; она пересекается с кривой изменения сферической aberrации вблизи вершины последней.

ПОЛЕВЫЕ АБЕРРАЦИИ ОТДЕЛЬНОЙ ЛИНЗЫ В ВОЗДУХЕ.  
РОЛЬ ПРОГИБА ЛИНЗЫ

§ 53. Нахождение положений входного зрачка, обеспечивающих исправление астигматизма

Обратимся к астигматическим инвариантам преломляющей поверхности. Имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{n' \cos^2 i'}{t'} - \frac{n \cos^2 i}{t} &= \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r} \\ \frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} &= \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r} \end{aligned} \right\} \quad (703)$$

где  $n$  и  $n'$  — показатели преломления до и после преломляющей поверхности;

$i$  и  $i'$  — углы падения и преломления главного луча;

$t$  и  $t'$  — расстояния от точки пересечения луча с преломляющей поверхностью соответственно до точек предмета и изображения, создаваемых пучками лучей, идущими в меридиональной плоскости;

$s$  и  $s'$  — соответственные расстояния для пучков лучей, идущих в сагиттальной плоскости;

$r$  — радиус кривизны преломляющей поверхности.

Для предмета, лежащего в бесконечности, имеет место

$$t_1 = s_1 = \infty, \quad (704)$$

тогда для первой преломляющей поверхности получим

$$\frac{n \cos^2 i'_1}{t'_1} = \frac{n \cos i'_1 - \cos i_1}{r_1} = \varphi_1 = \frac{n}{s'_1}, \quad (705)$$

имея в виду, что для линзы, находящейся в воздухе,  $n_1 = n_3 = 1$  и  $n_2 = n$ .

Предполагая, что расстояние между первой и второй поверхностями линзы вдоль главного луча («косая толщина») настолько мало, что им можно пренебречь (главный луч идет через острый край линзы), можно приравнять отрезки  $t'_1$  и  $s'_1$  от первой преломляющей поверхности отрезкам  $t_2$  и  $s_2$  перед второй преломляющей поверхностью. Следовательно,

$$t'_1 = t_2; \quad s'_1 = s_2, \quad (706)$$

и тогда формулы (705) могут быть даны в виде

$$\frac{n}{t_2} = \frac{n \cos i'_1 - \cos i_1}{r_1 \cos^3 i'_1}; \quad \frac{n}{s_2} = \frac{n \cos i'_1 - \cos i_1}{r_1}. \quad (707)$$

При исследовании работы линзы говорилось о необходимости исправления астигматизма; соблюдение этого условия должно привести к удовлетворению равенства

$$t'_2 = s'_2. \quad (708)$$

Пользуясь инвариантами (703) для второй поверхности линзы, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos^2 i'_2}{t'_2} &= \frac{\cos i'_2 - n \cos i_2}{r_2} + \frac{n \cos i'_1 - \cos i_1}{r_1 \cos^2 i'_1} \cos^2 i_2 \\ \frac{1}{s'_2} &= \frac{\cos i'_2 - n \cos i_2}{r_2} + \frac{n \cos i'_1 - \cos i_1}{r_1} = \frac{1}{t'_2} \end{aligned} \right\} \quad (709)$$

и

$$\frac{1}{t'_2} = \frac{\cos i'_2 - n \cos i_2}{r_2 \cos^2 i'_2} + \frac{n \cos i'_1 - \cos i_1}{r_1 \cos^2 i'_1} \cdot \frac{\cos^2 i_2}{\cos^2 i'_2} = \frac{1}{s'_2}, \quad (710)$$

откуда может быть получено выражение, связывающее оптические силы первой и второй поверхностей:

$$\varphi_2 \left( 1 - \frac{1}{\cos^2 i'_2} \right) + \varphi_1 \left( 1 - \frac{\cos^2 i_2}{\cos^2 i'_1 \cos^2 i'_2} \right) = 0 \quad (711)$$

или

$$-\varphi_2 \sin^2 i'_2 + \varphi_1 \left( \cos^2 i'_2 - \frac{\cos^2 i_2}{\cos^2 i'_1} \right) = 0, \quad (712)$$

и окончательно

$$(\varphi_1 + \varphi_2) \sin^2 i'_2 = \varphi_1 \left( 1 - \frac{\cos^2 i_2}{\cos^2 i'_1} \right). \quad (713)$$

Рассмотрим полученное выражение более детально.

*1-й случай.* Полагаем  $\varphi_1 = 0$  (оптическая сила первой поверхности равна нулю — первая поверхность плоская). Для соблюдения условия (713) необходимо, чтобы

$$\varphi_2 \sin^2 i'_2 = 0; \quad (714)$$

это возможно лишь тогда, когда угол  $i'_2 = 0$ , т. е., когда главный луч пройдет через вторую поверхность без преломления.

*2-й случай.* Полагаем, что  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  одного знака (случай двояковыпуклой линзы). Преобразуем формулу (713):

$$1 + \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{1 - \frac{\cos^2 i_2}{\cos^2 i'_1}}{n^2 (1 - \cos^2 i_2)}. \quad (715)$$

Из формулы (715) нетрудно установить, что ее правая часть имеет значение, меньшее единицы, а левая при  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , имеющих одинаковые знаки, больше единицы; иными словами, формула (715) для двояковыпуклой линзы невыполнима; такая линза не может быть скорректирована на астигматизм для предмета, расположенного в бесконечности.

Наоборот, из формулы (715) можно сделать вывод, что для исправления астигматизма у положительной линзы следует иметь радиусы обеих поверхностей одного и того же знака, т. е. линзе необходимо придавать менискообразную форму.

Соблюдение условия (715) дает возможность определить лишь абсолютные значения углов  $i_2$  и  $i'_1$  при заданных значениях оптических сил поверхностей  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (а следовательно, и при заданных значениях радиусов кривизны); углы  $i_2$ ,  $i'_2$  и  $i_1$ ,  $i'_1$  могут иметь либо одинаковые, либо разные знаки.



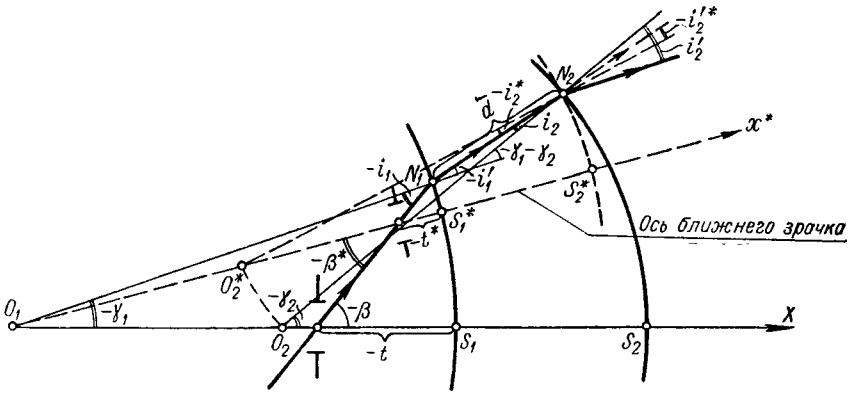
3-й случай. Примем  $\varphi_1 = -\varphi_2 \neq 0$ . Левая часть формулы (715) обращается в нуль; для соблюдения же равенства нулю правой части необходимо равенство

$$\varphi_1 \left( 1 - \frac{\cos^2 i_2}{\cos^2 i_1'} \right) = 0, \quad (716)$$

что равносильно равенствам

$$i_2 = i_1'; \quad i_2 = -i_1'. \quad (717)$$

Первый из корней не представляет практического интереса (обе поверхности полностью совпадают); второй же корень  $i_2 = -i_1'$  приводит к положительному мениску с равными радиусами, использованному Хёгом в объективе типа Гипергон.



Фиг. 119. Образование двух зрачков, дающих исправление астигматизма.

Наиболее часто оптическая сила первой поверхности значительно меньше по абсолютной величине, нежели оптическая сила второй поверхности; вторая поверхность является силовой поверхностью, а первая поверхность играет роль коррекционного элемента.

Если оптическая сила первой поверхности значительно меньше силы второй поверхности, то согласно формуле (713) нетрудно прийти к выводу, что в этом случае будет наблюдаться малость углов  $i_2$  и  $i_2'$ .

Действительно, при  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  разных знаков необходимо, чтобы второй множитель в правой части формулы (713) точно также был отрицательным, т. е. чтобы отношение  $\cos^2 i_2'^2$  и  $\cos^2 i_1'^2$  было больше единицы.

Из рассмотрения формулы (715) видно, что в случае, когда исправление астигматизма осуществимо, возможны два решения задачи: при одинаковых и при разных знаках у углов  $i_2$ ,  $i_2'$  и  $i_1$ ,  $i_1'$  на обеих поверхностях линзы.

Рассмотрим оба решения более подробно.

На фиг. 119 показан ход главного луча через линзу менискообразной формы с радиусом первой поверхности  $r_1$  значительно большим,

нежели радиус второй поверхности  $r_2$ . На фигуре  $O_1$  и  $O_2$  — центры первой и второй поверхностей для случая, когда при прохождении главного луча через линзу образуются углы  $i_1'$  и  $i_2$  разных знаков;  $N_1$  и  $N_2$  — точки преломления главного луча на первой и второй поверхностях;  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — углы нормалей, восстановленных в точках  $N_1$

и  $N_2$ , с осью, проходящей через центры  $O_1$  и  $O_2$ . Угол главного луча с осью  $O_1O_2$  обозначим через  $\beta$ .

Из фиг. 119 следует:

$$\gamma_1 - \gamma_2 = i_2 - i_1' \quad (718)$$

и

$$\beta = \gamma_1 + i_1. \quad (719)$$

Если косая толщина  $\bar{d}$  мала (главный луч идет через острый край линзы), нетрудно установить зависимость между  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

Пользуясь фиг. 120, находим:

$$r_1 \sin \gamma_1 = r_2 \sin \gamma_2 = h. \quad (720)$$

Имея углы  $i_2$  и  $i_1'$ , можно, пользуясь формулами (718) и (720), найти углы  $\gamma_2$  и  $\gamma_1$ , а затем определить полевой угол  $\beta$ .

Составляя выражения для синуса и косинуса разности углов

$$\left. \begin{aligned} \sin(\gamma_1 - \gamma_2) &= \sin(i_2 - i_1') = \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 - \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 \\ \cos(\gamma_1 - \gamma_2) &= \cos(i_2 - i_1') = \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 + \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (721)$$

и пользуясь формулой (720)

$$\left. \begin{aligned} \sin(i_2 - i_1') &= \sin \gamma_1 \left( \cos \gamma_2 - \frac{r_1}{r_2} \cos \gamma_1 \right) = \\ &= \operatorname{tg} \gamma_1 \left( \cos \gamma_2 \cos \gamma_1 - \frac{r_1}{r_2} \cos^2 \gamma_1 \right) \\ \cos(i_2 - i_1') &= \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 + \frac{r_1}{r_2} \sin^2 \gamma_1 \end{aligned} \right\} \quad (722)$$

получим следующее выражение:

$$\cos(i_2 - i_1') - \frac{\sin(i_2 - i_1')}{\operatorname{tg} \gamma_1} = \frac{r_1}{r_2}, \quad (723)$$

откуда можно получить угол  $\gamma_1$ :

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\sin(i_2 - i_1')}{\cos(i_2 - i_1') - \frac{r_1}{r_2}}. \quad (724)$$

Легко показать, что при тех же самых величинах углов  $i_2$  и  $i_1'$  и радиусов  $r_1$  и  $r_2$  числитель в этой формуле получит большее, а знаменатель меньшее значение в том случае, если углы  $i_2$  и  $i_1'$  будут иметь разные знаки; следовательно, при разных знаках тангенс  $\gamma_1$  будет приобретать большие значения, чем при одинаковых знаках.

Из фиг. 119 видно, что углы  $\gamma_1$  и  $i_1$  всегда имеют один и тот же знак; поэтому величина полевого угла будет расти вместе с ростом величины угла  $\gamma_1$ .

Изменение знака у угла  $i_2$  (фиг. 119) по отношению к углу  $i_1$  может быть произведено за счет поворота нормали ко второй поверхности на угол  $2 i_2$ ; центр второй поверхности займет положение  $O_2'$ , более близкое к первой нормали  $O_1N_1$ , чем исходное положение  $O_2$ , а главный луч пересечет новую ось значительно ближе к линзе, нежели в исходном положении<sup>1</sup>.

Следовательно, при одних и тех же радиусах кривизны и одних и тех же по абсолютной величине углах падения и преломления главного луча на обеих поверхностях существуют два положения входного зрачка и два полевых угла, при которых наблюдается строгое исправление астигматизма.

При этом дальнему положению входного зрачка будет соответствовать большая величина поля зрения, ближнему положению зрачка — меньшее поле.

По мере увеличения первого радиуса происходит процесс сближения обоих зрачков; в предельном случае плоско-выпуклой линзы оба зрачка совпадут, причем выходной зрачок совпадает с центром второй преломляющей поверхности.

Можно отыскать такое положение входного зрачка (которое будет находиться между обоими зрачками, дающими исправление астигматизма), когда главный луч пойдет по нормали ко второй поверхности; в этом случае вторая поверхность не внесет астигматизма и линза будет обладать положительным астигматизмом, возникшим при преломлении главного луча на первой поверхности.

Для зрачков, лежащих по обе стороны от зрачков, дающих исправление астигматизма, получатся отрицательные значения астигматизма.

## § 54. Определение зональных ошибок астигматизма

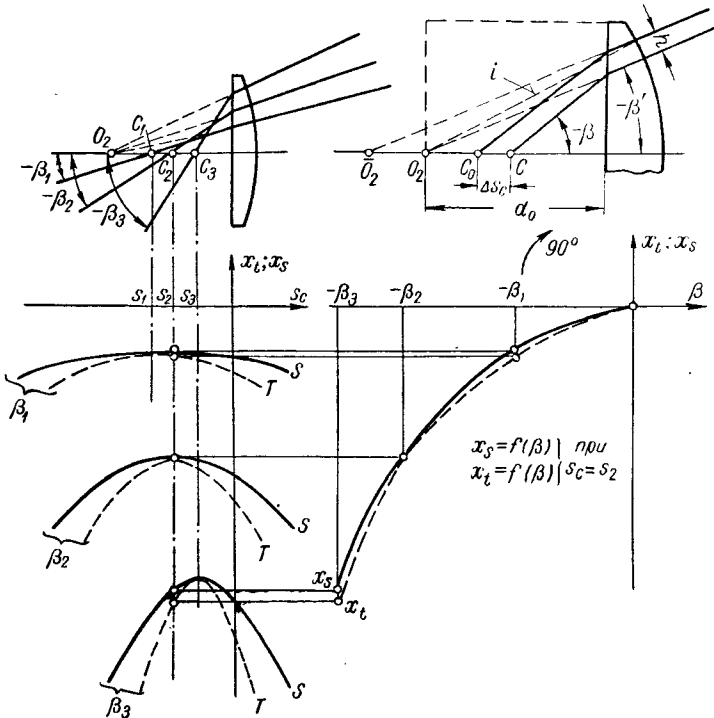
Возвратимся к дальнейшему исследованию работы плоско-выпуклой линзы. Предположим, что толщина линзы равна радиусу второй ее поверхности, и определим положение зрачка, дающего исправление астигматизма и совпадающего с первой поверхностью линзы; очевидно, что в этом случае будет наблюдаться строгое исправление астигматизма по всему полю.

Несколько иная картина получится, если толщина плоско-выпуклой линзы отличается от второго радиуса. При изменении полевого угла будет наблюдаться некоторое перемещение входного зрачка, обеспечивающего исправление астигматизма, обусловленное сферической aberrацией для главных лучей, вносимой первой плоской поверхностью линзы (фиг. 121).

На фиг. 121 под схемой рассматриваемой плоско-выпуклой линзы показано изменение астигматизма в зависимости от изменения

<sup>1</sup> На фиг. 119 все величины, относящиеся к повернутой второй поверхности, обозначены звездочкой.

положения входного зрачка для трех различных полевых углов в одном и том же масштабе; на схеме линзы показан ход трех главных лучей, для которых исправлен астигматизм. Справа на фигуре показана зависимость изменения астигматизма по полю зрения для одного (среднего) положения зрачка. Эта зависимость представляет обычный график астигматизма, повернутый на  $90^\circ$ . На левом нижнем графике фиг. 121 показано, что с увеличением поля зрения наблюдается постепенное смещение вправо зрачков с исправленным астигматизмом.



Фиг. 121. Астигматизм тонкой плоско-выпуклой линзы.

Для некоторого среднего положения входного зрачка можно наблюдать наличие как на меньшем, так и на большем поле зрения некоторого астигматизма  $x_t - x_s$ , в обоих случаях отрицательного по знаку. Эта картина отражена на графике справа.

Определим величину астигматизма, возникающего вследствие аберрации в зрачках, вносимой первой плоской поверхностью линзы.

Величина астигматизма для одной (в нашем случае второй) преломляющей поверхности при предмете, находящемся в бесконечности, может быть определена с помощью формулы (703). Находим

$$t' - s' = - \frac{r \sin^2 i'}{\cos i' - n \cos i} = \frac{n^2 r \sin^2 i}{\cos i' - n \cos i} \quad (725)$$

Выразим синус угла падения через отношение смещения  $h$  падающего на вторую поверхность луча от нормали к величине радиуса этой поверхности:

$$\sin i = -\frac{h}{r}. \quad (726)$$

В случае малости угла  $i$  или смещения  $h$  величина астигматизма выразится величиной второго порядка малости:

$$t' - s' = -\frac{n^2 h^2}{r(\cos i' - n \cos i)} \approx \frac{n^2 h^2}{r(n-1)} \quad (727)$$

и численно в случае  $n = 1,5$  и  $r = -50$ :

$$t' - s' = -\frac{1,5^2}{0,5 \cdot 50} h^2 = -\frac{2,25}{25} h^2 = -0,09 h^2.$$

Величина смещения  $h$  может быть определена из правого верхнего графика (фиг. 121) как произведение из величины смещения  $\Delta s_c$  входного зрачка на тангенс полевого угла  $\beta$  и на косинус угла  $\beta'$  главного луча после его преломления на плоской поверхности линзы. Величина  $h$  может быть найдена по формуле

$$h = \Delta s_c \operatorname{tg} \beta \cos \beta'. \quad (728)$$

Величина же смещения входного зрачка  $\Delta s_c$  зависит от сферической aberrации во входном зрачке — сферической aberrации «срезанной» от линзы плоскопараллельной пластинки с толщиной  $d_0$ , равной разности между радиусом кривизны второй преломляющей поверхности и фактической толщиной линзы:  $d_0 = -(r_2 + d)$ .

Величина этой сферической aberrации может быть определена по известной формуле

$$\Delta s_c' = \left(1 - \frac{\cos \beta}{\cos \beta'}\right) \frac{d_0}{n}, \quad (729)$$

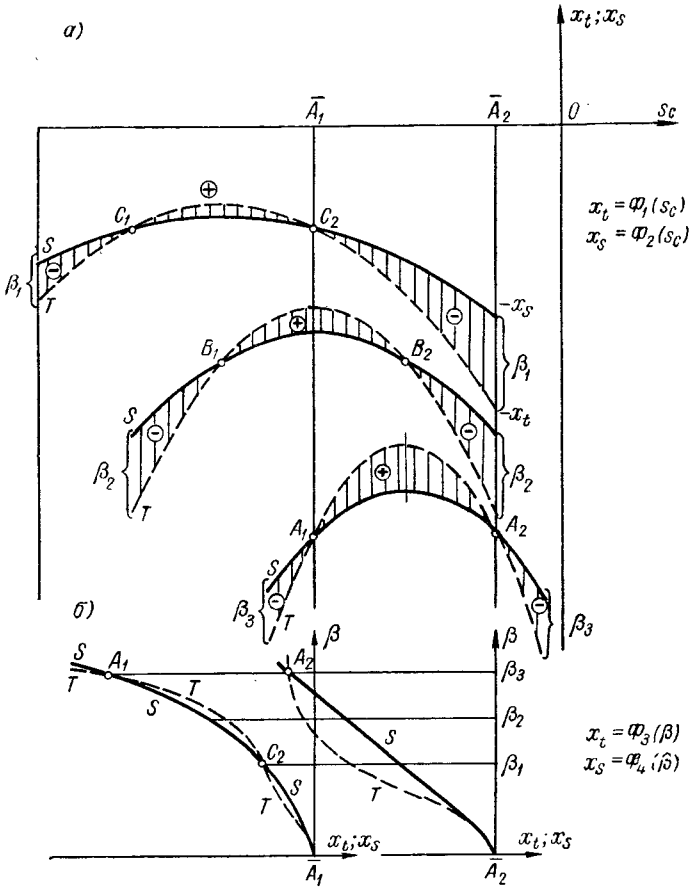
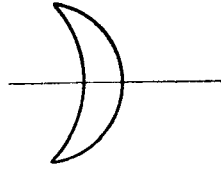
из которой может быть получена и приближенная формула:

$$\Delta s_{III}' \approx \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{2n} \beta^2 d_0 = \frac{n^2 - 1}{2n^3} \beta^2 \cdot d_0. \quad (730)$$

Величина сферической aberrации во входном зрачке достаточно ощутима. Например, при толщине «срезанной» пластинки в 40 мм, полевым углом  $\beta = 30^\circ$  и  $n = 1,5$  aberrация в зрачке достигает величины 2,2 мм.

Придадим теперь первой поверхности линзы небольшую вогнутость; тогда исправление астигматизма становится возможным. Выбирая ход главного луча таким образом, чтобы главный луч проходил вторую поверхность по нормали, можно получить также и положительные значения для астигматической разности.

На графиках (фиг. 122) это равносильно тому, что кривые, выражающие изменение астигматизма в зависимости от перемещения зрачка, несколько поднимутся. При этом кривая для изменения меридиональной кривизны поднимется быстрее, чем кривая для сагиттальной



Фиг. 122. Астигматизм мениска:  
 $\beta_1$  — малый угол;  $\beta_2$  — средний угол;  $\beta_3$  — край поля зрения.

кривизны и пересечет последнюю в некоторых двух точках, которые будут соответствовать ближнему и дальнему положениям входного зрачка.

Смещение вправо всех вершин кривых изменения астигматизма при увеличении поля зрения, наблюдавшееся при плоско-выпуклой

линзе, сохраняется и для линзы менискообразной формы (фиг. 122, а).

В результате этого смещения вершин происходит следующее. Задаваясь таким положением зрачка, когда на краю поля зрения будет иметь место пересечение обеих астигматических кривых, т. е. задаваясь исправлением астигматизма на краю поля зрения, замечаем, что при дальнем положении входного зрачка для меньших полевых углов будем получать положительные значения астигматической разности ( $x_t - x_s$ ) — положительные зоны астигматизма; наоборот, при ближнем положении входного зрачка получим отрицательные значения астигматической разности — отрицательные зоны астигматизма (фиг. 122, б).

При очень слабой кривизне первой поверхности, вблизи оси системы, можно наблюдать небольшие отрицательные зоны астигматизма наряду с положительными зонами при больших полевых углах, т. е. наблюдается двойное пересечение обеих астигматических кривых.

Две формы астигматических кривых, соответствующие дальнему и ближнему положениям входного зрачка, показаны слева и справа в нижней части фиг. 122.

Рассматривая кривые изменения астигматизма в зависимости от изменения положения зрачка для одного из средних полевых углов  $\beta_2$ , можно представить себе случай, когда расстояние между обоими положениями зрачков, дающих исправление астигматизма, таково, что оно приблизительно равно удвоенному смещению вершины астигматических кривых для какого-то большего полевого угла.

Тогда величина положительной зоны ( $x_t - x_s$ ) при исправлении астигматизма на краю поля зрения, для дальнего положения зрачка, ограничена расхождением астигматических кривых вблизи их вершин. При исправлении же астигматизма на краю поля зрения для ближнего положения зрачка получим отрицательные зоны, лежащие на расстоянии от вершин кривых, приблизительно равном расстоянию между зрачками. Величина отрицательных астигматических зон значительно превышает по абсолютной величине положительные зоны при дальнем положении входного зрачка.

Величина наклона касательной к кривой изменения меридиональной кривизны в зависимости от перемещения зрачка характеризует знак и величину комы; кривизна же этой меридиональной кривой определяет меридиональную сферическую aberrацию.

Общее выражение волновой aberrации по меридиональному волновому фронту может быть представлено в виде ряда, расположенного по возрастающим степеням апертурного угла  $u'$  в предположении, что апертурные углы малы. Тогда

$$\epsilon = Au' + A'u'^2 + A''u'^3 + A'''u'^4 + \dots \quad (731)$$

Поперечные aberrации в плоскости, перпендикулярной главному лучу, могут быть определены как частные производные по обоим апертурным углам (в меридиональной и сагиттальной плоскостях). Так как нас интересуют лишь поперечные aberrации только в меридиональной

плоскости, то соответствующая составляющая поперечной аберрации может быть представлена в виде

$$-\sigma = \frac{d\varepsilon}{du'} = A + 2A'u' + 3A''u'^2 + 4A'''u'^3 + \dots \quad (732)$$

В частном случае равенства  $u' = 0$  коэффициент  $A = -\sigma_0$  выразит волновую дисторсию — начальное смещение кривой поперечной аберрации от оси абсцисс; соответственным выбором начала координат это смещение можно сделать равным нулю.

Беря производную от поперечной аберрации по апертурному углу, можно определить смещение меридионального изображения вдоль каустики:

$$-x = -\frac{d\sigma}{du'} = 2A' + 6A''u' + 12A'''u'^2 + \dots \quad (733)$$

При значении апертурного угла  $u' = 0$  коэффициент  $2A'$  выразит начальное смещение  $x_0$  меридионального изображения относительно начала координат вдоль оси абсцисс; это смещение также может быть сведено к нулю соответственным выбором начала координат.

Производная от смещения меридионального изображения по апертурному углу дает величину радиуса каустики — радиуса комы. Имеем:

$$-R_{\kappa} = -\frac{dx}{du'} = 6A'' + 24A'''u' + \dots; \quad (734)$$

приравнивая апертурный угол нулю, находим начальное значение радиуса комы  $R_{\kappa,0}$ .

Наконец, производная от радиуса комы по апертурному углу

$$-R_{\kappa\phi} = -\frac{dR_{\kappa}}{du'} = 24A''' + \dots \quad (735)$$

дает величину радиуса сферической аберрации — радиуса эволюты каустики. Пользуясь этими величинами, можно выразить как волновую аберрацию, так и величину поперечной и других аберраций в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} -\varepsilon &= \sigma_0 u' + \frac{x_0}{2} u'^2 + \frac{R_{\kappa,0}}{6} u'^3 + \frac{R_{\kappa\phi}}{24} u'^4 + \dots \\ \sigma &= \sigma_0 + x_0 u' + \frac{R_{\kappa,0}}{2} u'^2 + \frac{R_{\kappa\phi}}{6} u'^3 + \dots \\ x &= x_0 + R_{\kappa,0} u' + \frac{R_{\kappa\phi}}{2} u'^2 + \dots \\ R_{\kappa} &= R_{\kappa,0} + R_{\kappa\phi} u' + \dots \end{aligned} \right\} \quad (736)$$

Величина апертурного угла  $u'$  может быть выражена через высоту на входном зрачке  $h$  и меридиональное фокусное расстояние  $f'_i$  или через перемещение зрачка вдоль оси системы  $\Delta$  и  $f'_i$ . При этом необходимо учесть наклон падающего на линзу пучка лучей и наклон главного луча по выходе из линзы. Находим:



$$u' = \frac{h \cos \beta'}{f_t} = \frac{\Delta \cdot \sin \beta}{f_t} \cdot \frac{\cos \beta'}{\cos \beta} \quad (737)$$

и для смещения меридионального изображения:

$$x = \frac{x_t}{\cos \beta'} = x_0 + \frac{R_{\kappa,0}}{f_t} \sin \beta \frac{\cos \beta'}{\cos \beta} \Delta + \frac{R_{c\phi}}{2f_t^2} \sin^2 \beta \frac{\cos^2 \beta'}{\cos^2 \beta} \Delta^2 + \dots \quad (738)$$

Полученное уравнение 2-й степени относительно перемещения зрачка выражает в первом приближении зависимость изменения меридиональной кривизны как функции перемещения входного зрачка (см. на фиг. 121 и 122 пунктирную кривую для каждого из полевых углов  $\beta$ ).

Дифференцируя формулу (738) дважды и приравнявая смещение зрачка нулю, можно получить выражение для радиуса комы и радиуса сферической аберрации:

$$R_{\kappa,0} = \frac{f_t}{\operatorname{tg} \beta \cos^2 \beta'} \cdot \frac{dx_t}{d\Delta} = \frac{f_t \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta \cos^2 \beta'}; \quad (739)$$

$$R_{c\phi} = \frac{f_t^2}{\operatorname{tg}^2 \beta \cos^4 \beta'} \cdot \frac{d^2 x_t}{d\Delta^2} = \frac{f_t^2}{R \cos^3 \gamma \operatorname{tg}^2 \beta \cos^4 \beta'}, \quad (740)$$

где  $\gamma$  — угол наклона кривой изменения меридиональной кривизны к оси абсцисс на фиг. 121 и 122;

$R$  — радиус кривизны этой кривой.

Это позволяет утверждать, что когда положение входного зрачка таково, что на краю поля зрения наклон кривой изменения меридиональной кривизны противоположен наклону аналогичной кривой в зональной части поля, то на краю поля и на зоне наблюдается астигматическая разность одного и того же знака, но происходит изменение знака комы при переходе от зональной части поля зрения к краю поля.

Как указано выше, исправление астигматизма для простой линзы в воздухе возможно тогда, когда вторая преломляющая поверхность линзы близка к концентричности с выходным зрачком, а ее первая поверхность имеет вогнутую форму, или в предельном случае — плоскую. При этом оптическая сила второй поверхности оказывается равной или даже превосходящей оптическую силу всей линзы; наоборот, оптическая сила первой поверхности получается малой и противоположной по знаку силе всей линзы.

В этом случае можно назвать вторую поверхность линзы *силовым элементом* или *силовой поверхностью* и первую поверхность — *коррекционной поверхностью* или *коррекционным элементом*. Возможно, что первая поверхность окажется силовой, а вторая явится коррекционной.

Естественно ожидать, что тогда силовая поверхность должна обладать малыми углами падения и преломления главного луча; первая поверхность станет в этом случае выпуклой.

Постепенно изменяя прогиб линзы, можно отыскать этот случай, пользуясь формулой (713). Действительно, приравнявая, например,

угол  $i'_1$  нулю, получаем, что оптическая сила второй поверхности должна быть равной

$$\varphi_2 = - \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \varphi_1, \quad (741)$$

т. е. отрицательной по знаку и значительно меньшей по абсолютной величине, нежели сила первой поверхности.

В этом частном случае получаем единственное положение зрачка, обеспечивающее уничтожение астигматизма, аналогичное положению входного зрачка для рассмотренной плоско-выпуклой линзы.

Однако форма линзы, обладающая единым входным зрачком, обеспечивающим уничтожение астигматизма, даст внесенное в линзу положение зрачка, тогда как для случая плоско-выпуклой линзы зрачок располагался перед линзой. Кроме того, вторая поверхность такой линзы уже не будет плоской; на основании формулы (741) нетрудно установить, что эта поверхность окажется вогнутой.

Все промежуточные формы линз, лежащие между плоско-выпуклой линзой и линзой с единым внесенным зрачком, не могут дать исправления астигматизма ни при каком положении зрачка; следовательно, во всем множестве форм получим две обособленные области, в которых возможно исправление астигматизма.

Эти две области форм линз приведены на фиг. 123; здесь дана в каждой области кривая, характеризующая положения входных зрачков, для которых наблюдается уничтожение астигматизма.

Форма линзы, имеющей наименьшую сферическую aberrацию на оси системы, оказывается расположенной внутри того интервала, в котором невозможно исправление астигматизма. Таким образом, можно сделать вывод, что для линз, построенных из поверхностей сферической формы, исправление астигматизма всегда связано с известным ухудшением сферической aberrации.

Изменение сферической aberrации на оси системы также приведено на фиг. 123 (см. вклейку).

Принимая какую-либо из приведенных форм линз, исправленных на астигматизм, за основу той или иной оптической системы, необходимо принять во внимание и другие aberrации (кому, сферическую aberrацию в наклонных пучках и т. п.). Однако, komponуя оптическую систему из двух симметричных или пропорциональных элементов, можно добиться резкого уменьшения комы или ее полного уничтожения (симметричная система при увеличении минус единица).

В связи с этим исправление таких aberrаций, как кома, не вызывает трудностей, подобных встречающимся при исправлении сферической aberrации в наклонных пучках, которая нередко оказывается совершенно неподатливой и ограничивающей возможности развития той или иной оптической системы.

Поэтому после рассмотрения астигматизма простой линзы в воздухе следует в какой-либо степени изучить изменение сферической aberrации по полю зрения.

## § 55. Сферическая aberrация линзы в наклонных пучках

Исследование изменения сферической aberrации по полю зрения удобнее всего начать с рассмотрения случая плоско-выпуклой линзы при таком положении входного зрачка, когда главный луч проходит вторую преломляющую поверхность по нормали, т. е. без преломления.

Очевидно, что характер каустики в наклонном пучке ничем, кроме виньетирования, не будет отличаться от каустики на оси линзы; сферическая aberrация в наклонном пучке будет, без учета ограничения пучка, тождественно равна сферической aberrации на оси системы, что равносильно постоянству сферической aberrации по полю.

Однако этот благоприятный исходный случай не всегда может быть положен в основу той или иной разрабатываемой оптической системы.

Более того, на практике приходится пользоваться другими исходными формами простой линзы и строить те или иные оптические системы, опираясь на линзу менискообразной формы, работающую при дальнем или ближнем положении входного зрачка, обеспечивающего исправление астигматизма.

Поэтому дальнейшее рассмотрение изменения сферической aberrации по полю зрения целесообразно вести применительно к дальнему, либо к ближнему положению зрачка, дающего исправление астигматизма.

Такое раздельное исследование сферической aberrации вполне обосновано, так как поведение сферической aberrации при дальнем и ближнем положениях входного зрачка имеет различный характер.

Различие обуславливается тем, что при дальнем положении входного зрачка наблюдаются значительно меньшие углы падения и преломления главного луча на обеих поверхностях линзы, чем при ближнем положении зрачка. Кроме того, при дальнем положении входного зрачка отклонение главного луча происходит в одну и ту же сторону на обеих поверхностях линзы, что приближает отклонение этого луча к минимуму; для ближнего же положения зрачка первая и вторая поверхности создают отклонение главного луча в противоположные стороны, что равносильно работе преломляющего клина с большим наклоном к ходу преломляемого луча.

Перейдем к исследованию изменения сферической aberrации по полю зрения при ближнем положении входного зрачка, когда острый край мениска и входной зрачок совпадают друг с другом.

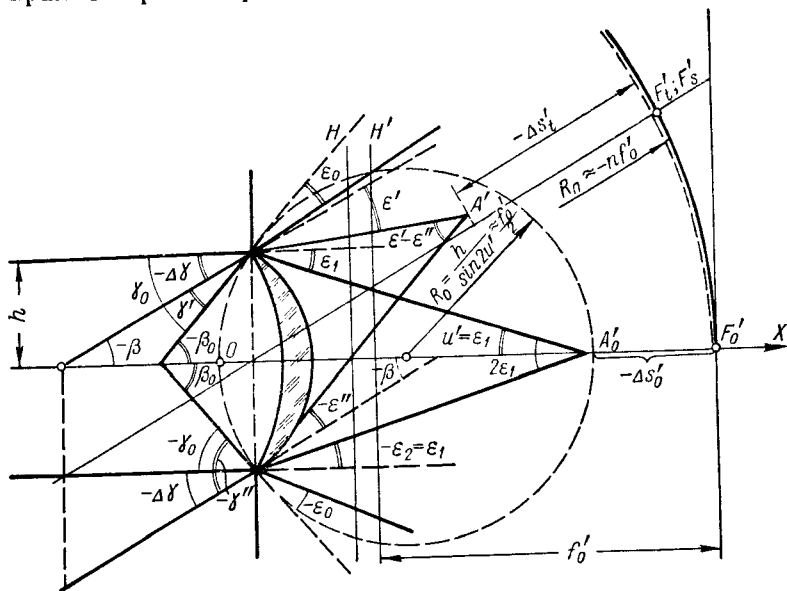
Это вполне возможно, так как ближнее положение входного зрачка может совпадать с первой поверхностью линзы, или даже углубляться в нее. Подобное положение входного зрачка можно наблюдать, например, для более или менее сильно выгнутых менисков (см. примеры 8 и 9-й, фиг. 123).

В качестве примера совмещения входного зрачка с острым краем линзы можно взять мениск со следующими данными

$$\begin{array}{lll} r_1 = -50,0 & & f'_0 = 512,889 \\ & d = 2,485 \quad n = 1,6126 & \\ r_2 = -43,95 & & s'_0 = 522,572 \end{array}$$

Острый край у этой линзы образуется при диаметре, равном 66 мм, при этом стрелка прогиба первой поверхности принимает значение — 12,437, равное величине расстояния от первой поверхности до входного зрачка.

Сферическая aberrация линзы для осевой точки, вычисленная для края отверстия зрачка, совпадающего с острым краем линзы,



Фиг. 124. Прохождение широкого пучка лучей через мениск с острым краем.

$\Delta s' = -324,57$ ; исправление астигматизма наблюдается при полевом угле  $\beta = -10^\circ$ .

На фиг. 124 показан мениск с острым краем, являющимся входным зрачком; для некоторого полевого угла  $\beta$  имеет место исправление астигматизма.

Точка  $A_0'$ , представляющая собой точку пересечения с осью системы луча, падающего параллельно оси на острый край линзы, определяет величину продольной сферической aberrации на оси  $\Delta s_0'$ .

При этом крайний луч претерпит отклонение от первоначального направления  $\epsilon_1 = u'$ , равное апертурному углу выходящего луча.

Луч, проходящий через нижний край линзы, отклонится на угол  $-\epsilon_2 = \epsilon_1$ .

Изменяя угол наклона луча, проходящего через острый край линзы, можно найти такое положение луча, когда он приобретет наименьший угол отклонения  $\epsilon_0$ ; предположим, что такой луч образует с осью линзы некоторый угол  $-\beta_0$ .

Этот луч, идущий с минимумом угла отклонения, может быть принят за начало отсчета; тогда для лучей, падающих на линзу параллельно оси, получим углы  $\gamma_0$  относительно луча с минимумом отклонения, равные углу  $-\beta_0$ .

Перейдем к рассмотрению хода лучей наклонного пучка, составляющего с осью линзы угол  $\beta$ , при котором имеет место отсутствие астигматизма.

Верхний луч этого наклонного пучка образует с лучом наименьшего отклонения некоторый угол  $\gamma'$ , нижний луч — соответственно угол  $\gamma''$ .

Пусть теперь верхний луч имеет отклонение, равное  $\epsilon'$ , и нижний луч — отклонение, равное  $\epsilon''$ .

Предположим, что величина угла отклонения в общем случае может быть выражена некоторой функцией

$$\epsilon = \epsilon(\gamma) \quad (742)$$

от угла между падающим лучом и лучом наименьшего отклонения.

Пользуясь фиг. 124, можно написать следующие выражения для верхнего и нижнего лучей наклонного пучка:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon' &= \epsilon(\gamma') = \epsilon(\gamma_0 + \Delta\gamma) = \epsilon(\gamma_0 + \beta) \\ \epsilon'' &= -\epsilon(\gamma'') = +\epsilon(-\gamma_0 - \Delta\gamma) = +\epsilon(-\gamma_0 - \beta) \end{aligned} \right\} \quad (743)$$

Нас будет интересовать разность между углами  $\epsilon'$  и  $\epsilon''$ , определяющая угол между обоими лучами наклонного пучка после его преломления линзой. Найдем:

$$\epsilon' - \epsilon'' = \epsilon(\gamma') + \epsilon(\gamma'') = \epsilon(\gamma_0 - \beta) - \epsilon(-\gamma_0 - \beta). \quad (744)$$

Разлагая функцию  $\epsilon$  в ряд по степеням угла  $\gamma$  (предполагается, что такое разложение возможно в некотором интервале) и отбрасывая члены, содержащие угол  $\gamma$  в степенях выше второй, можно написать следующую приближенную формулу для угла отклонения:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \epsilon(\gamma) = \epsilon_0 + A\gamma^2 + \dots \approx \epsilon_0 + A\gamma^2 \\ \epsilon' &\approx \epsilon_0 + A(\gamma_0 - \beta)^2; \quad \epsilon'' \approx \epsilon_0 + A(-\gamma_0 - \beta)^2 \end{aligned} \right\} \quad (745)$$

Первая степень угла  $\gamma$  должна отсутствовать, так как по определению функции  $\epsilon$  предполагалось, что она в точке  $\gamma = 0$  должна давать минимум.

Пользуясь формулами (745), можно составить выражение для разности углов  $\epsilon' - \epsilon''$ .

$$\begin{aligned} \epsilon' - \epsilon'' &\approx 2\epsilon_0 + A[(\gamma_0 - \beta)^2 + (-\gamma_0 - \beta)^2] = 2\epsilon_0 + 2A\gamma_0^2 + 2A\beta^2 = \\ &= \epsilon_1 - \epsilon_2 + 2A\beta^2 = 2u' + 2A\beta^2. \end{aligned} \quad (746)$$

Полученное выражение (746) показывает, что величина угла между обоими лучами после преломления их линзой больше, нежели величина угла между преломленными лучами для осевого пучка лучей.

Отсюда нетрудно сделать вывод, что точка пересечения обоих лучей наклонного пучка должна оказаться внутри окружности, проведенной через оба края линзы и точку пересечения крайних лучей осевого пучка с осью линзы.

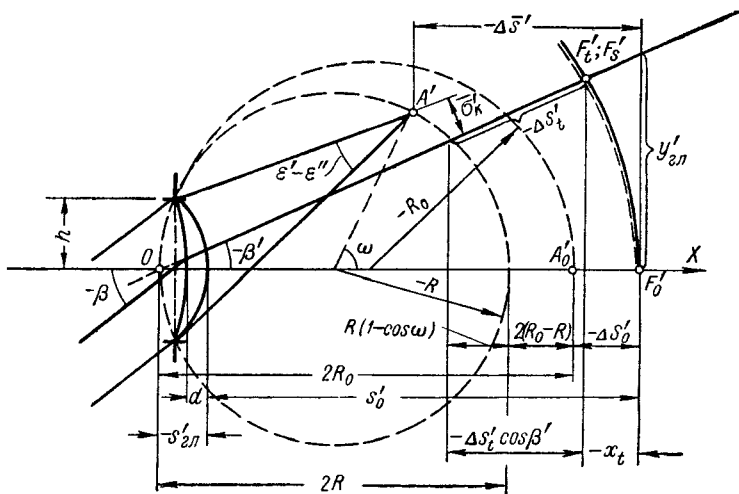
Определим радиус этой окружности. Из фиг. 125 следует:

$$R_0 = -\frac{h}{\sin 2u'}. \quad (747)$$

Можно определить и радиус окружности, на которую попадает точка пересечения проходящих через острые края линзы крайних лучей наклонного пучка. Находим:

$$R = -\frac{h}{\sin(\epsilon' - \epsilon'')} \quad (748)$$

Полагая, что кома  $\bar{\sigma}'_k$  линзы мала и что обе окружности радиусов  $R$  и  $R_0$  касаются друг друга в точке  $O$ , можно написать следующее выражение, связывающее величины сферической aberrации на оси



Фиг. 125. Определение сферической aberrации в наклонном пучке для мениска, работающего при ближнем положении зрачка.

линзы и в наклонном пучке лучей и величину меридиональной кривизны поля. Получим:

$$-\Delta s'_t \cos \beta' - x_t = -R(1 - \cos \omega) - 2(R_0 - R) - \Delta s'_0 \quad (749)$$

Принимая, что выходной зрачок также будет совпадать с точкой касания обеих окружностей радиусов  $R_0$  и  $R$ , получим, что угол  $\omega$  будет равняться углу  $2\beta'$ . Тогда формула (749) может быть представлена в виде

$$-\Delta s'_t \cos \beta' - x_t = -R(1 - \cos 2\beta') - 2R_0 + 2R - \Delta s'_0 \quad (750)$$

и после несложных преобразований получим:

$$-(\Delta s'_t - \Delta s'_0) \cos \beta' = 2(R \cos^2 \beta' - R_0) - \Delta s'_0(1 - \cos \beta') + x_t \quad (751)$$

Пользуясь формулами (747) и (748), можно привести формулу (751) к виду:

$$\begin{aligned} -(\Delta s'_t - \Delta s'_0) \cos \beta' = & -2h \left[ \frac{\cos^2 \beta'}{\sin(\epsilon' - \epsilon'')} - \frac{1}{\sin 2u'} \right] - \\ & - (1 - \cos \beta') \Delta s'_0 + x_t; \end{aligned} \quad (752)$$

применяя формулу (746) и заменяя синусы углов  $\epsilon' - \epsilon''$  и  $2u'$  самими углами, получим:

$$-(\Delta s'_i - \Delta s'_0) \cos \beta' = -\frac{2h}{2u'} \left[ \frac{\cos^2 \beta'}{1 + \frac{A}{u'} \beta'^2} - 1 \right] - (1 - \cos \beta') \Delta s'_0 + x_i. \quad (753)$$

Но так как отношение величин  $h$  и  $u'$  может быть заменено фокусным расстоянием  $f'_0$ , формула (753) переходит в следующее выражение:

$$(\Delta s'_i - \Delta s'_0) \cos \beta' = \left[ -\sin^2 \beta' - \frac{A}{u'} \beta'^2 \cos^2 \beta' \right] f'_0 + (1 - \cos \beta') \Delta s'_0 - x_i. \quad (754)$$

Пренебрегая в разложении косинуса членами, содержащими степени выше второй, можно преобразовать формулу (754) следующим образом:

$$\Delta s'_i - \Delta s'_0 \approx - \left[ 1 + \frac{A}{u'} - \frac{\Delta s'_0}{2f'_0} \right] f'_0 \beta'^2 - x_i; \quad (755)$$

этой формулой определяется прирост сферической аберрации в зависимости от угла поля зрения.

Из формулы (755) видно, что прирост сферической аберрации по полю зрения мало зависит от величины сферической аберрации на оси системы; член, содержащий коэффициент  $A$ , определяет переход от окружности радиуса  $R_0$  к окружности радиуса  $R$ . Особый интерес представляет член, выраженный единицей; он определяет прирост сферической аберрации, происходящий вследствие исправления кривизны поля. При исправленном астигматизме, когда кривизна поля подчиняется условию Пецваля, ее величина определится по следующей приближенной формуле

$$x_i = -\frac{f'_0}{n} (1 - \cos \beta') \approx -\frac{f'_0}{2n} \beta'^2, \quad (756)$$

с помощью которой можно преобразовать формулу (755):

$$\Delta s'_i - \Delta s'_0 \approx \left[ 1 - \frac{1}{2n} + \frac{A}{u'} - \frac{\Delta s'_0}{2f'_0} \right] f'_0 \beta'^2. \quad (757)$$

В этом случае член, определяющий прирост сферической аберрации по полю зрения, при  $n = 1,5$  уменьшится примерно в полтора раза по сравнению со случаем, когда меридиональная кривизна поля полностью уничтожена ( $x_i = 0$ ).

Обращаясь к частному случаю плоско-выпуклой линзы при зрачке, совпадающем с ее второй поверхностью, замечаем, что меридиональную кривизну поля можно определить с помощью окружности, построенной на фокусном расстоянии линзы, как на диаметре. Величина  $x_i$  равна

$$x_i = -\frac{f'_0}{2} (1 - \cos 2\beta') = -f'_0 \sin^2 \beta' \approx -f'_0 \beta'^2, \quad (758)$$

и прирост сферической аберрации по полю зрения определится лишь двумя факторами — продольной сферической аберрацией на оси и

коэффициентом  $A$ , выражающим степень удаления угла отклонения лучей наклонного пучка от минимума при росте полевого угла  $\beta'$ .

Для этого частного случая формула (755) примет следующий вид:

$$\Delta s'_i - \Delta s'_0 = - \left[ \frac{A}{u'} - \frac{\Delta s'_0}{2f'_0} \right] f'_0 \beta'^2 = \left[ \frac{A}{u'} - \frac{\Delta s'_0}{2f'_0} \right] x_i. \quad (759)$$

Перейдем к рассмотрению поведения сферической аберрации по полю зрения для случая дальнего положения входного зрачка.

К особенностям работы мениска при таком положении входного зрачка относятся следующие.

1. Малость углов падения и преломления на обеих поверхностях мениска. Так, рассматривая в качестве конкретного примера мениск со следующими данными:

$$r_1 = -25,32$$

$$d = 5,0 \quad n = 1,6126$$

$$r_2 = -19,26$$

$$f'_0 = 100,0146 \quad s'_0 = 107,517$$

при дальнем положении зрачка, находящегося от первой поверхности линзы на расстоянии  $s = -15,0$  (второй, ближний зрачок находится на расстоянии  $s = +0,3$ ), получаем следующие значения углов:

$$\beta = -40^\circ; \quad i_1 = 15^\circ 11'; \quad i'_1 = 9^\circ 21'; \quad i_2 = 6^\circ 15'; \quad i'_2 = 10^\circ 06'.$$

2. Уменьшение отрезка главного луча между поверхностями мениска («косой» толщины); в приведенном примере этот отрезок  $\bar{d}$  для дальнего положения зрачка при полевого угле  $\beta = -50^\circ$  равен 2,33, т. е. он меньше, чем толщина  $d$  по оси мениска, равная 5.

На изменение сферической аберрации по полю зрения влияют следующие три фактора.

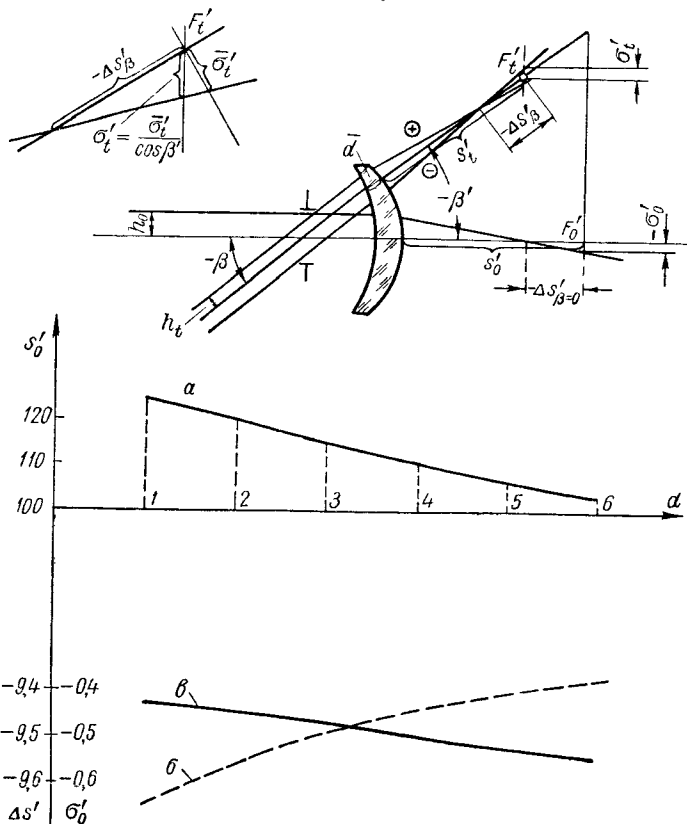
1. Изменение углов главного луча с нормальными к обеим поверхностям линзы. Продольная сферическая аберрация, возникающая в этом случае, являясь четной функцией, будет зависеть только от четных степеней углов  $i$  и  $i'$ , поэтому при малых углах  $i$  и  $i'$  она будет величиной второго порядка малости. Следовательно, величина сферической аберрации при наличии малых углов  $i$  и  $i'$  не должна отличаться от сферической аберрации в случае равенства  $i$  и  $i'$  нулю.

Это позволяет заменить рассмотрение сферической аберрации на краю поля зрения мениска при малых углах  $i$  и  $i'$  рассмотрением сферической аберрации на оси мениска с измененной толщиной, равной косой толщине по главному лучу.

2. Изменение косой толщины (толщины по главному лучу). Такое изменение не затрагивает изменения сферической аберрации первой поверхности, наоборот, вторая поверхность будет изменять увеличение, с которым она работает и, следовательно, величину вносимой ею сферической аберрации. Существенно, что изменение увеличения, с которым работает вторая поверхность, вызовет соответственное изменение суммарной доли сферической аберрации, вносимой первой поверхностью.



3. Изменение ширины наклонного пучка при его прохождении через матернальную диафрагму под различными углами наклона к оси системы. Рассмотрим более детально работу мениска при дальнем положении входного зрачка (фиг. 126). На фигуре  $F'_0$  — задний фокус для нулевых лучей;  $F'_i$  — задний фокус для бесконечно тонкого мери-



Фиг. 126. Сферическая aberrация в наклонном пучке для мениска, работающего при дальнем положении зрачка.  $a$  — кривая изменения  $s'_0$  с изменением толщины линзы;  $b$  — кривая изменения  $\Delta s'$  с изменением толщины линзы;  $v$  — кривая изменения  $\sigma'_0$  с изменением толщины линзы.

дионального пучка лучей;  $s'_0$  и  $s'_i$  — расстояния от задней поверхности линзы вдоль оси и вдоль главного луча соответственно до фокусов  $F'_0$  и  $F'_i$ ;  $\sigma'_i$  — поперечная сферическая aberrация наклонного пучка в плоскости, перпендикулярной главному лучу;  $\sigma'_t$  — поперечная сферическая aberrация наклонного пучка в плоскости, перпендикулярной оси;  $\Delta s'$  — продольная сферическая aberrация вдоль главного луча;  $h_0$  — высота крайнего луча, входящего в систему параллельно оси;  $h_i$  — высота крайнего луча в наклонном параллельном пучке, составляющем с осью системы угол  $\beta$ .

Высоты  $h_0$  и  $h_t$  согласно фиг. 126 связаны формулой

$$h_t = h_0 \cos \beta. \quad (760)$$

Также (см. вспомогательный чертеж на фиг. 126) легко связываются между собой величины  $\bar{\sigma}'_t$  и  $\sigma'_t$ :

$$\sigma'_t = \frac{\bar{\sigma}'_t}{\cos \beta'}. \quad (761)$$

Косая толщина  $d_{\text{кос}}$  и расстояние  $s'_t$  до меридионального фокуса связаны более сложной зависимостью; обе величины могут быть найдены из тригонометрического расчета хода главного луча.

Величины продольной и поперечной сферической аберрации вдоль главного луча могут быть представлены как функции от косой толщины. Пренебрегая влиянием углов падения и преломления  $i$  и  $i'$  (что вполне допустимо при дальнем положении входного зрачка, когда эти углы малы), можно эту зависимость отождествить с изменением сферической аберрации на оси для мениска с теми же самыми радиусами, но с изменяющейся толщиной  $d$ .

Подобная зависимость могла бы быть определена на основе теории аберраций третьего порядка, однако значительно точнее она может быть установлена на основе тригонометрического расчета хода лучей.

Для высоты крайнего луча  $h_0 = 5 \text{ мм} = \text{const}$  эта зависимость (фиг. 126, кривые  $\Delta s'$ ,  $s'_0$  и  $\sigma'_0$ ) для разных значений  $d$  рассматриваемой линзы приведена в табл. 17.

Таблица 17

$d$	$s'_0$	$\Delta s'$	$\sigma'_0$
1	125,468	— 9,65	— 0,42
2	120,230	— 9,56	— 0,44
3	115,546	— 9,49	— 0,46
4	111,329	— 9,44	— 0,49
5	107,517	— 9,40	— 0,51
6	104,051	— 9,37	— 0,53

Из таблицы видно, что при изменении толщины линзы изменение ее сферической аберрации протекает сравнительно медленно, причем изменение поперечной сферической аберрации почти обратно пропорционально изменению отрезка  $s'_0$ .

Сопоставляя (табл. 18) величины отрезков  $s'_t$  и соответствующих им косых толщин  $\bar{d}_{\text{кос}}$ , взятых из реального расчета хода главного луча, видим, что зависимость между этими величинами несколько расходится с зависимостью между отрезками  $s'_0$  и толщиной  $d$  для мениска с изменяющейся толщиной.

Это расхождение вполне закономерно и обусловлено влиянием изменения углов падения и преломления главного луча на поверх-

ностях линзы. Поэтому, изучая изменение сферической aberrации по полю зрения, необходимо придерживаться зависимости изменения сферической aberrации от какой-либо одной из этих двух величин, принимая за аргумент либо косую толщину  $\bar{d}_{\text{кос}}$ , либо отрезок до меридионального фокуса  $s'_i$ .

В дальнейшем в качестве аргумента примем величину  $s'_i$  и будем находить соответствующую этому отрезку величину  $d_i$ , которая может быть названа меридиональной толщиной. Эта толщина приведена также в табл. 18.

Получив таким образом все элементы «спрямленной» линзы, можно, учитывая изменение ширины наклонного пучка для различных углов наклона, определить изменение ее поперечной сферической aberrации  $\bar{\sigma}'_{0i}$  (табл. 18).

Величины  $\bar{\sigma}'_{0i}$  будут выражать приближенное значение поперечной сферической aberrации наклонного пучка в плоскости, перпендикулярной главному лучу.

Деля величины  $\bar{\sigma}'_{0i}$  на косинусы соответственных полевых углов  $\beta'$ , получим приближенное выражение для поперечной сферической aberrации наклонного пучка в плоскости, перпендикулярной оси системы.

Сопоставляя величины  $\frac{\bar{\sigma}'_{0i}}{\cos \beta'}$  с величинами поперечной сферической aberrации  $\sigma'_{\text{накл}}$  в плоскостях, проходящих через меридиональные фокусы, вычисленными на основании тригонометрического расчета хода лучей и приведенными в последнем столбце табл. 18, наблюдаем весьма хорошее совпадение приближенных и точных значений для поперечной сферической aberrации в наклонных пучках.

Таблица 18

$\beta$	$x_t$	$x_s$	$s'_t$	$d_{\text{кос}}$	$d_t$	$h_t$	$\bar{\sigma}'_{0i}$	$\frac{\bar{\sigma}'_{0i}}{\cos \beta'}$	$\bar{\sigma}'_{\text{накл}}$
50°	— 18,24	— 18,69	122,45	2,33	1,55	3,21	— 0,11	— 0,14	— 0,13
40	— 10,85	— 11,53	117,29	3,31	2,625	3,83	— 0,20	— 0,23	— 0,25
30	— 5,75	— 6,31	113,09	4,06	3,55	4,33	— 0,30	— 0,34	— 0,34
20	— 2,45	— 2,75	110,01	4,59	4,35	4,70	— 0,41	— 0,42	— 0,43
10	— 0,60	— 0,68	108,08	4,90	4,85	4,92	— 0,48	— 0,48	— 0,48

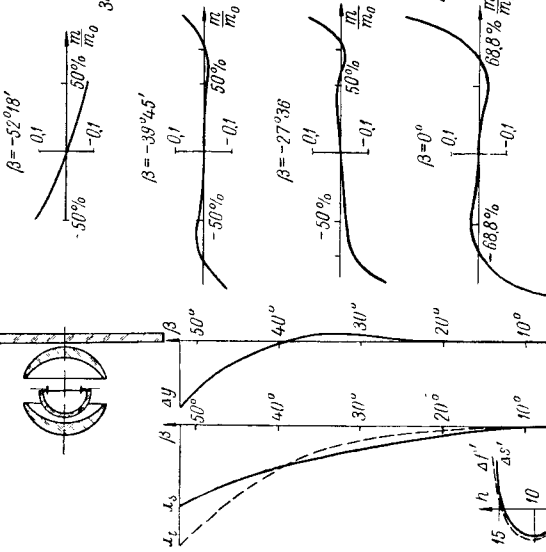
Такое совпадение не является случайным и обусловлено правильным выбором принятых допущений.

При дальнем положении входного зрачка поперечная сферическая aberrация в наклонных пучках не только не растет по сравнению со сферической aberrацией на оси системы, но даже несколько уменьшается к краю поля зрения. Для случая ближнего положения зрачка у той же самой линзы получаем (как это уже было установлено ранее) весьма быстрый рост сферической aberrации по полю зрения.

а) Руссар-19

$f' = 97,8$   $2\beta = 104^\circ$   $i : 6,3$

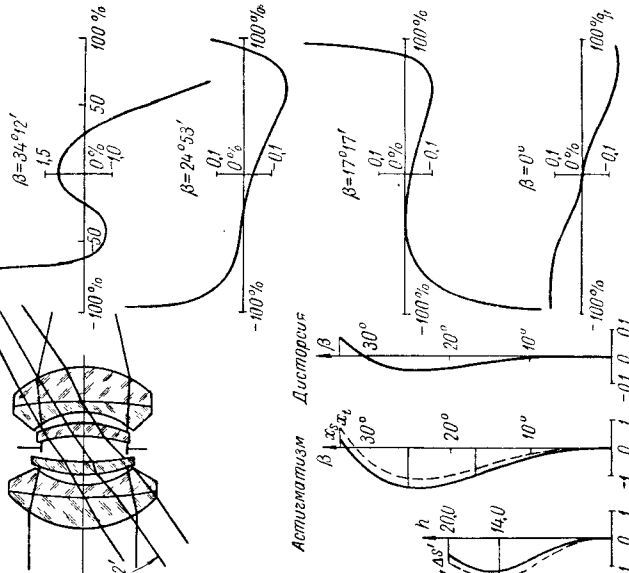
Аберрации широких  
наклонных пучков



б) Руссар-Плазмат

$f' = 140,0$   $2\beta = 70^\circ$   $i : 3,5$

Аберрации широких  
наклонных пучков



Фиг. 127. Характер изменения сферической аберрации по полю зрения в зависимости от положения входного зрачка:

**а** — при дальнейшем положении входного зрачка для менска — в объективе Руссар-19; **б** — при ближайшем положении входного зрачка для менска — в объективе Руссар-Плазмат.

В качестве характерного примера можно привести изменение сферической аберрации для двух объективов: объектива Руссар-19, построенного на базе мениска с дальним положением входного зрачка, и объектива Руссар-Плазмат, построенного на основе мениска с ближним положением входного зрачка.

Схемы этих объективов и графики изменения по полю зрения их сферической аберрации приведены на фиг. 127.

---

## Глава XVI

### ЛИНЗА В ВОЗДУХЕ С НЕСФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

#### § 56. Некоторые свойства поверхностей второго порядка

Анализ работы линзы, расположенной в воздухе, был начат с изучения влияния «прогиба» линзы на ее аберрации; таким образом, осуществлялось изучение влияния изменения формы линзы на ее аберрации при соблюдении условия сохранения сферичности преломляющих поверхностей линзы.

Однако это условие является частным случаем и потому ограничивает возможности изучения влияния изменения формы линзы; так, понятие «форма линзы» может включать в себя и изменение формы преломляющих поверхностей, иначе говоря, исследование влияния изменения формы линзы на ее аберрации не может быть полным, если оно не охватит собой и изменения формы (отступления от сферичности) преломляющих поверхностей.

Это и заставило после рассмотрения работы прогиба линзы перейти к исследованию влияния несферичности преломляющей поверхности.

Вопрос о применении в оптических системах несферических поверхностей для лучшего исправления аберраций имеет историческую давность. Так, еще Декарт пытался применять несферические поверхности для устранения сферической аберрации в простых линзах и ставил задачу создания специального станка для изготовления подобных поверхностей.

Тем не менее до сих пор несферические поверхности не нашли широкого применения в оптических системах, хотя принято говорить о широких перспективах их применения.

Несферические поверхности применяются лишь в осветительных системах (конденсорные линзы с уничтоженной сферической аберрацией), в астрономической оптике для устранения сферической аберрации (параболические зеркала, коррекционная пластинка Шмидта), в окулярах (параболическая поверхность у глазной линзы) и в широкоугольных объективах с улучшенным светораспределением по полю зрения.

Одной из причин ограниченного распространения несферических поверхностей явилась сложность технологии их изготовления и контроля по сравнению с технологией изготовления и контролем обычных сферических поверхностей; однако было бы неправильно считать эту причину единственной.

Другой серьезной причиной, мешавшей широкому применению несферических поверхностей в расчетах оптических систем является недостаточно ясное представление о коррекционных возможностях этих поверхностей.

Изучение коррекционных возможностей линз с несферическими поверхностями в первом приближении можно было бы осуществить с помощью формул, полученных на основе теории аббераций третьего порядка <sup>1</sup>.

Однако при этом нельзя выявить всех дополнительных коррекционных возможностей, которыми обладают несферические поверхности при больших значениях полевых или апертурных углов; существенно, что в этих случаях применение несферических поверхностей может оказаться особенно ценным.

В силу этих соображений попытаемся провести анализ особенностей работы несферических поверхностей, опираясь на точные формулы.

Рассмотрим некоторые свойства несферических поверхностей второго порядка.

Уравнение кривой второго порядка, отнесенное к вершине, может быть представлено в следующем виде:

$$y^2 = Ax + Bx^2. \quad (762)$$

Дифференцируя это выражение, получаем:

$$2yy' = A + 2Bx \quad (763)$$

и, дифференцируя вторично:

$$2y'^2 + 2yy'' = 2B. \quad (764)$$

Для определения радиуса кривизны плоской кривой в аналитической геометрии имеется следующее выражение:

$$R = r_t = - \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}. \quad (765)$$

Величина первой производной определяет тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = y' = \frac{A + 2Bx}{2y}. \quad (766)$$

Сагиттальный же радиус кривизны центрированной несферической поверхности определится как величина отрезка нормали между точкой кривой и осью абсцисс; таким образом,

$$r_s = \frac{y}{\cos \alpha}. \quad (767)$$

<sup>1</sup> См. например, кандидатскую диссертацию Г. Н. Моторина «Теория эйконала и применение ее к расчету несферических поверхностей».

Но так как

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + y'^2, \quad (768)$$

то величина сагиттального радиуса кривизны может быть определена из формулы

$$r_s = y \sqrt{1 + y'^2}. \quad (769)$$

Величина  $y$  может быть выражена через  $y'$  и  $x$ , поэтому

$$y = \frac{A + 2Bx}{2y'} \quad (770)$$

и тогда

$$r_s = (A + 2Bx) \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{2y'}, \quad (771)$$

или

$$r_s = \left( \frac{A}{2} + Bx \right) \sqrt{1 + \frac{1}{y'^2}}, \quad (772)$$

где

$$\frac{1}{y'} = \frac{2y}{A + 2Bx}. \quad (773)$$

В случае  $x = 0$ ,  $y = 0$  и  $\frac{1}{y'^2} = 0$ , поэтому для радиуса кривизны в вершине кривой находим

$$r_0 = \frac{A}{2}. \quad (774)$$

Общее уравнение кривой и выражения для сагиттального и меридионального радиусов кривизны преобразуются:

$$v^2 = 2r_0x + Bx^2; \quad (775)$$

$$r_s = y \sqrt{1 + y'^2}; \quad (776)$$

$$r_t = - \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}. \quad (777)$$

Формула для  $r_t$  может быть выражена через  $r_s$ :

$$r_t = - \frac{r_s^3}{y^3 y''}. \quad (778)$$

Из формулы (764) следует, что

$$vy'' = B - y'^2 \quad (779)$$

и, умножая (779) на  $y^2$ , получаем:

$$v^3 y'' = (B - v'^2) y^2 = By^2 - (yy')^2 \quad (780)$$

или

$$v^3 y'' = B(2r_0x + Bx^2) - \frac{(2r_0 + 2Bx)^2}{4}. \quad (781)$$

Делая преобразования, находим

$$y^3 y'' = -r_0^2, \quad (782)$$

и окончательно

$$r_t = \frac{r_s^3}{r_0^2}. \quad (783)$$

Полученная формула (783) справедлива для любой кривой второго порядка.

Найдем длину большой оси кривой. Для этой цели необходимо найти разность значений абсцисс  $x_1$ , для которых величины ординат обращаются в нуль. Поэтому, приравнявая нулю уравнение (775)

$$Bx_1^2 + 2r_0x_1 = 0 \quad (784)$$

и решая его относительно  $x_1$ , получаем два значения  $x_1$ :

$$x_1 = 0; \quad x_1 = 2a = -\frac{2r_0}{B}. \quad (785)$$

Найдя значение коэффициента  $B$

$$B = -\frac{r_0}{a}, \quad (786)$$

можно общее уравнение кривой представить в виде

$$y^2 = 2r_0x - \frac{r_0}{a}x^2 = r_0\left(2x - \frac{x^2}{a}\right). \quad (787)$$

Для эллипса  $a > 0$ ; для параболы  $a = \infty$  и для гиперболы  $a < 0$  (при положительном  $r_0$ ).

Величина малой оси  $b$  может быть найдена для  $x = a$ . Получаем:

$$b^2 = r_0\left(2a - \frac{a^2}{a}\right) = r_0a, \quad (788)$$

откуда

$$r_0 = \frac{b^2}{a}. \quad (789)$$

Выражение (789) общеизвестно.

## § 57. Положения анастигматических зрачков для поверхностей второго порядка

Перейдем к рассмотрению астигматизма несферической поверхности. Пользуясь астигматическими инвариантами

$$\left. \begin{aligned} \frac{n' \cos^2 i'}{t'} - \frac{n \cos^2 i}{t} &= \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_t} \\ \frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} &= \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_s} \end{aligned} \right\} \quad (790)$$

и задавая  $t = s = \infty$  и  $t' = s'$  (условие анастигматичности для изображения предметной точки, лежащей в бесконечности), получим:

$$\frac{1}{t'} = \frac{1}{s'} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_t \cos^2 i'} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_s}, \quad (791)$$



откуда следует

$$r_t \cos^2 i' = r_s; \quad (792)$$

это выражение справедливо для любой кривой.

Для кривых же второго порядка меридиональный радиус кривизны может быть выражен через сагиттальный радиус кривизны и радиус кривизны кривой в ее вершине; тогда

$$\frac{r_s^3}{r_0^2} \cos^2 i' = r_s; \quad r_s^2 \cos^2 i' = r_0^2, \quad (793)$$

откуда получим

$$\cos i' = \frac{r_0}{r_s}; \quad r_0 = r_s \cos i' \quad (794)$$

Формула (794) дает два значения угла  $i'$ , отличающиеся лишь знаком.

Найдем теперь расстояния  $s'$  точек пересечения лучей, определяющих положения выходных зрачков, обеспечивающих исправление астигматизма.

Можно составить уравнение:

$$s' = x + y \operatorname{tg}(\alpha \pm i'). \quad (795)$$

Развертывая выражение для тангенса суммы, находим:

$$s' = x + y \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} i'}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} i'}. \quad (796)$$

Из формул (766), (774) и (775) следует:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r_0 + Bx}{\sqrt{2r_0x + Bx^2}}; \quad (797)$$

пользуясь формулой (794), получаем:

$$\cos i' = \frac{r_0}{r_s} = \frac{r_0}{y} \cos \alpha, \quad (798)$$

но косинус угла  $\alpha$  может быть выражен через его тангенс. Таким образом,

$$\cos i' = \frac{r_0}{\sqrt{2r_0x + Bx^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(r_0 + Bx)^2}{2r_0x + Bx^2}}} \quad (799)$$

или

$$\cos i' = \frac{r_0}{\sqrt{2r_0x + Bx^2 + (r_0 + Bx)^2}}. \quad (800)$$

Тангенс угла  $i'$  может быть выражен через его косинус. Получаем:

$$\operatorname{tg} i' = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 i'} - 1} = \sqrt{\frac{2r_0x + Bx^2 + (r_0 + Bx)^2}{r_0^2} - 1} \quad (801)$$

или

$$\operatorname{tg} i' = \frac{1}{r_0} \sqrt{(1 + B)(2r_0 + Bx)x}. \quad (802)$$

Пользуясь формулами (797) и (802), преобразуем формулу (796).

Находим:

$$s' = x + \sqrt{2r_0x + Bx^2} \frac{\frac{r_0 + Bx}{\sqrt{2r_0x + Bx^2}} \pm \frac{1}{r_0} \sqrt{(1+B)(2r_0 + Bx)x}}{1 \mp (r_0 + Bx) \frac{1}{r_0} \sqrt{1+B}} \quad (803)$$

или

$$s' = x + \frac{r_0 + Bx \pm \frac{1}{r_0} (2r_0x + Bx^2) \sqrt{1+B}}{1 \mp \frac{r_0 + Bx}{r_0} \sqrt{1+B}}. \quad (804)$$

Делая дальнейшие преобразования, получаем:

$$s' = \frac{r_0 + (1+B)x \pm x \sqrt{1+B}}{1 \mp \frac{r_0 + Bx}{r_0} \sqrt{1+B}} \quad (805)$$

и далее

$$s' = \frac{r_0 + (1+B \pm \sqrt{1+B})x}{1 \mp \left(1 + \frac{Bx}{r_0}\right) \sqrt{1+B}} \quad (806)$$

и, освобождаясь от иррациональности в знаменателе:

$$s' = \frac{[r_0 + (1+B \pm \sqrt{1+B})x][1 \mp \left(1 + \frac{Bx}{r_0}\right) \sqrt{1+B}]}{1 - (1+B) \left(1 + \frac{Bx}{r_0}\right)^2}. \quad (807)$$

После перемножения в числителе получаем:

$$s' = \frac{r_0 + (1+B)x \pm [(r_0 + Bx) \sqrt{1+B} + x \left(1 + \frac{Bx}{r_0}\right) (1+B) \sqrt{1+B}]}{1 - (1+B) \left(1 + \frac{Bx}{r_0}\right)^2} + \frac{x \sqrt{1+B} + (1+B) \left(1 + \frac{Bx}{r_0}\right) x}{1 - (1+B) \left(1 + \frac{Bx}{r_0}\right)^2} \quad (808)$$

или

$$s' = r_0 \frac{1 + 2(1+B) \frac{x}{r_0} + B(1+B) \frac{x^2}{r_0^2} \pm \sqrt{1+B} \left[1 + 2(1+B) \frac{x}{r_0} + B(1+B) \frac{x^2}{r_0^2}\right]}{-B \left[1 + 2(1+B) \frac{x}{r_0} + B(1+B) \frac{x^2}{r_0^2}\right]} \quad (809)$$

и, производя сокращения, получаем окончательно:

$$s' = -\frac{r_0}{B} (1 \pm \sqrt{1+B}). \quad (810)$$

Это последнее выражение не зависит от текущих координат кривой.

Определим сумму расстояний  $s'_1$  и  $s'_2$  до центров астигматических выходных зрачков. Пользуясь формулой (810), находим:

$$s'_1 + s'_2 = -\frac{r_0}{B} (1 + \sqrt{1+B} + 1 - \sqrt{1+B}) = -\frac{2r_0}{B} \quad (811)$$

и, обращаясь к формуле (786), получаем:

$$s'_1 + s'_2 = 2a. \quad (812)$$

Эта формула приводит к выводу, что сумма расстояний до анастигматических зрачков постоянна, не зависит от величины поля зрения и равна большой оси кривой.

Составим теперь разность расстояний до анастигматических зрачков. Пользуясь вновь формулой (810), получаем:

$$s'_1 - s'_2 = -\frac{2r_0}{B} \sqrt{1+B} = 2 \sqrt{a^2 - b^2} = 2c. \quad (813)$$

Эта формула показывает, что расстояние между анастигматическими зрачками кривой второго порядка равно расстоянию между фокусами этой кривой. Формулы (812) и (813) показывают, что выходные анастигматические зрачки для поверхности вращения второго порядка совпадают при предмете, расположенном в бесконечности, с геометрическими фокусами поверхности, независимо от показателей преломления по обоим сторонам преломляющей поверхности и величины поля зрения.

Например, для параболической поверхности анастигматические выходные зрачки расположены: один — в ее фокусе на расстоянии от вершины, равном половине радиуса кривизны параболы в ее вершине  $\frac{r_0}{2}$ , другой — в бесконечности.

Это свойство параболической поверхности позволяет, используя ее в сочетании с плоской поверхностью, построить плоско-параболическую линзу, свободную от астигматизма, для предмета, расположенного в бесконечности. Такая линза имеет телецентрический ход главных лучей в пространстве изображений, поэтому входной зрачок совпадает с ее передним физическим фокусом, но уже не с геометрическим фокусом кривой.

## § 58. Кома плоско-параболической линзы

Рассмотрение комы плоско-параболической линзы ограничим важным практическим случаем, когда предмет лежит в бесконечности, линза обращена к предмету плоской стороной и соблюдается условие уничтожения астигматизма.

На фиг. 128 показано преломление двух параллельных лучей, имеющих на параболической поверхности углы падения и преломления  $i, i + di$  и  $i', i' + di'$ . Угол между нормальными двух преломленных лучей примем равным  $\gamma$ ; расстояния до меридиональных фокусов вдоль обоих лучей — равными  $t'$  и  $t' + dt'$ . Дугу между точками преломления обозначим через  $ds$ , радиусы кривизны через  $r_t$  и  $r_t + dr_t$ .

Радиус каустики, определяющий кому, обозначим через  $R_k$ , дугу каустики — через  $s_k$ .

Из фиг. 128 следует:

$$-\sin i' ds + t' + dt' = t' + R_k du', \quad (814)$$

откуда

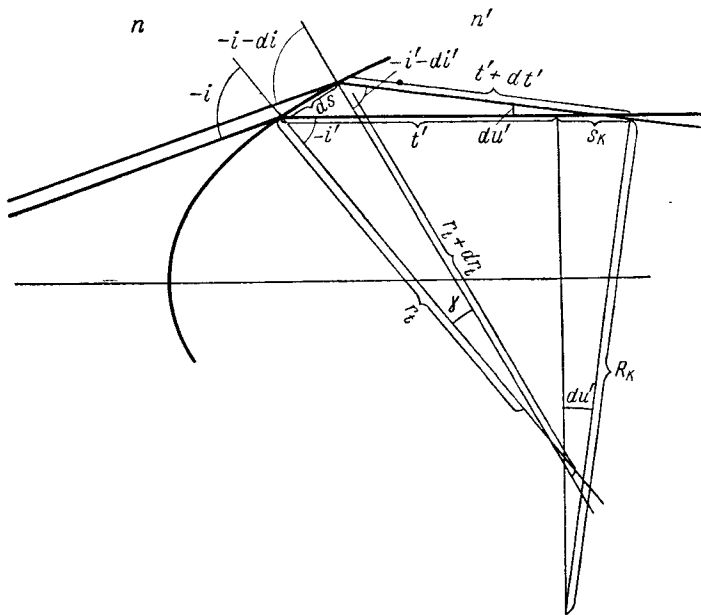
$$R_{\kappa} = \frac{-\sin i' ds + dt'}{du'}. \quad (815)$$

Апертурный угол  $du'$  может быть найден из той же фигуры. Находим:

$$du' = \frac{\cos i' ds}{t'}, \quad (816)$$

и тогда формула (815) примет следующий вид:

$$R_{\kappa} = \left( \frac{dt'}{\cos i' ds} - \operatorname{tg} i' \right) t'. \quad (817)$$



Фиг. 128. Определение комы для параболической поверхности.

Из меридионального инварианта получаем при  $t = \infty$ :

$$\frac{n' \cos^3 i'}{t'} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r_t}. \quad (818)$$

Логарифмически дифференцируя формулу (818), получаем:

$$-\frac{dt'}{t'} - 2 \operatorname{tg} i' di' = -\frac{dr_t}{r_t} - \frac{n' \sin i' di' - n \sin i di}{n' \cos i' - n \cos i}, \quad (819)$$

откуда

$$\frac{dt'}{t'} = \frac{dr_t}{r_t} - 2 \operatorname{tg} i' di' + \frac{di' - di}{n' \cos i' - n \cos i} n' \sin i'. \quad (820)$$

Дифференциалы  $di$  и  $di'$  связаны друг с другом:

$$\frac{di'}{\operatorname{tg} i'} = \frac{di}{\operatorname{tg} i}, \quad (821)$$

и тогда

$$\frac{dt'}{t'} = \frac{dr_t}{r_t} - 2 \operatorname{tg} i' di' + \frac{\left(1 - \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i'}\right) n' \sin i'}{n' \cos i' - n \cos i} di' \quad (822)$$

или

$$\frac{dt'}{t'} = \frac{dr_t}{r_t} - (2 \operatorname{tg} i' + \operatorname{tg} i) di'; \quad (823)$$

но, так как для параболы имеет место

$$r_t r_0^2 = r_s^3 = \frac{r_0^3}{\cos^3 \gamma} \quad (824)$$

или

$$r_t = \frac{r_0}{\cos^3 \gamma}, \quad (825)$$

то после логарифмического дифференцирования получаем:

$$\frac{dr_t}{r_t} = - \frac{d \cos^3 \gamma}{\cos^3 \gamma} = 3 \operatorname{tg} \gamma d\gamma. \quad (826)$$

На основании полученного выражения формула (823) может быть преобразована:

$$\frac{dt'}{t'} = 3 \operatorname{tg} \gamma d\gamma - (2 \operatorname{tg} i' + \operatorname{tg} i) di'. \quad (827)$$

Если в формуле (817) выразим  $ds$  через произведение  $r_t d\gamma$  и воспользуемся формулой (827), то найдем

$$R_\kappa = \left\{ \frac{t'}{r_t \cos i' d\gamma} [3 \operatorname{tg} \gamma d\gamma - (2 \operatorname{tg} i' + \operatorname{tg} i) di'] - \operatorname{tg} i' \right\} t' \quad (828)$$

или, пользуясь формулой (818), получим:

$$R_\kappa = \left\{ \frac{n' \cos i'}{n' \cos i' - n \cos i} \left[ 3 \operatorname{tg} \gamma - (2 \operatorname{tg} i' + \operatorname{tg} i) \frac{di'}{d\gamma} \right] - \operatorname{tg} i' \right\} t'. \quad (829)$$

Деля числитель и знаменатель в множителе перед квадратными скобками на  $n \sin i = n' \sin i'$ , получаем:

$$R_\kappa = \left\{ - \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i' - \operatorname{tg} i} \left[ 3 \operatorname{tg} \gamma - (2 \operatorname{tg} i' + \operatorname{tg} i) \frac{di'}{d\gamma} \right] - \operatorname{tg} i' \right\} t'. \quad (830)$$

Так как для отсутствия астигматизма необходимо, чтобы

$$\gamma = \pm i' \quad (831)$$

(что определяет два положения анастигматических зрачков), то радиус каустики  $R_\kappa$  принимает два значения:

$$\left. \begin{aligned} R_{\kappa,1} &= -(\operatorname{tg} i' + \operatorname{tg} i) t' \\ &\quad \gamma = i'; \\ R_{\kappa,2} &= -(\operatorname{tg} i' - \operatorname{tg} i) t' \\ &\quad \gamma = -i' \end{aligned} \right\} \quad (832)$$

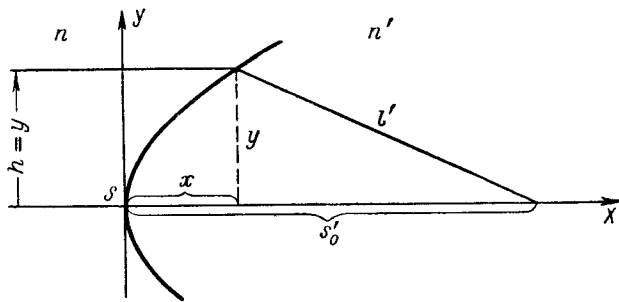
Второе значение радиуса каустики соответствует случаю телецентрического хода главного луча в пространстве изображений.

По своей абсолютной величине радиус комы в первом случае (ближнее положение входного зрачка) больше, чем во втором случае, в первом приближении, при  $n = 1,5$  примерно в три раза.

Знак радиуса комы в обоих случаях различен; это означает, что при переходе от одного положения выходного зрачка к другому кома плоско-параболической линзы переходит через нуль (см. § 60).

### § 59. Сферическая aberrация плоско-выпуклых линз с несферическими поверхностями

При рассмотрении работы плоско-выпуклой линзы со сферическими поверхностями в случае, когда предмет лежит в бесконечности, было установлено, что подобные линзы не дают возможности уничтожить сферическую aberrацию.



Фиг. 129. Определение формы анаберрационной поверхности.

Поэтому, переходя к рассмотрению работы несферической поверхности, поставим условие устранения сферической aberrации для бесконечно удаленного предмета.

Выше было указано, что при отсутствии aberrаций надо соблюдать принцип Ферма — условие постоянства оптической длины хода вдоль любого из лучей:

$$\sum nl = \text{const} = \sum nl_0. \quad (833)$$

На фиг. 129 показаны выпуклая несферическая поверхность с вершиной в точке  $S$  и плоская волновая поверхность, перпендикулярная к оси и касательная к вершине несферической поверхности.

Согласно принципу Ферма должно иметь место равенство оптической длины хода для луча, идущего на некоторой высоте  $h = y$ , и луча, идущего вдоль оси системы.

Пользуясь фиг. 129, составим оптические длины хода для обоих лучей. Находим:

$$nx + n'l' = n's'_0 \quad (834)$$

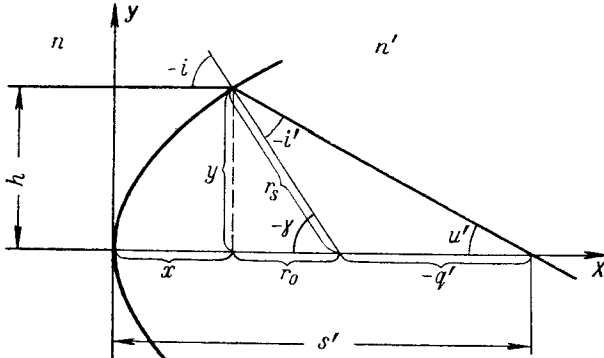
или, определяя  $l'$  как гипотенузу прямоугольного треугольника,

$$nx + n'\sqrt{y^2 + (s'_0 - x)^2} = n's'_0, \quad (835)$$

откуда нетрудно найти величину  $y^2$ :

$$y^2 = - (x - s'_0)^2 + \left( s'_0 - \frac{n}{n'}x \right)^2 = x^2 \left[ \left( \frac{n}{n'} \right)^2 - 1 \right] - 2s'_0x \left( \frac{n}{n'} - 1 \right). \quad (836)$$

Формула (836) показывает, что условие уничтожения сферической абберации приводит к несферической поверхности второго порядка.



Фиг. 130. Определение сферической абберации параболической поверхности.

Пользуясь подстановкой

$$x = x_1 + \frac{s'_0}{\frac{n}{n'} + 1}, \quad (837)$$

можно уравнение (836) привести к следующему виду:

$$x_1^2 - \frac{y^2}{\left( \frac{n}{n'} \right)^2 - 1} = \frac{s'^2_0}{\left( \frac{n}{n'} + 1 \right)^2}, \quad (838)$$

которое показывает, что при  $n < n'$  несферическая поверхность должна представлять эллипс и в случае  $n > n'$  — гиперболу.

Перейдем к рассмотрению сферической абберации параболической поверхности. На фиг. 130 показано преломление луча, падающего на поверхность параллельно оси на некоторой высоте  $h = y$ ; углы падения и преломления обозначим через  $i$  и  $i'$ ; угол нормали через  $\gamma$ ; сагиттальный радиус кривизны через  $r_s$  и апертурный угол преломленного луча через  $u'$ .

Напишем уравнение параболы

$$y^2 = 2r_0x, \quad (839)$$

откуда

$$x = \frac{y^2}{2r_0} = \frac{h^2}{2r_0}. \quad (840)$$

Из фигуры следует:

$$r_s \sin i' = q' \sin u'; \quad (841)$$

кроме того,

$$r_0 = r_s \cos i \quad (842)$$

и

$$u' = i' - i, \quad (843)$$

откуда для синуса  $u'$  находим:

$$\sin u' = n' \sin i' \left( \frac{\cos i}{n'} - \frac{\cos i'}{n} \right). \quad (844)$$

Найдем отношение синуса  $u'$  к синусу  $i'$ :

$$\frac{\sin u'}{\sin i'} = -\frac{1}{n} (n' \cos i' - n \cos i). \quad (845)$$

Пользуясь формулой (845), получаем из формулы (841):

$$q' = -\frac{r_0}{\cos i} \cdot \frac{n}{(n' \cos i' - n \cos i)}. \quad (846)$$

Зная величину  $q'$ , можно найти и величину  $s'$ :

$$s' = x + r_0 - q' = \frac{h^2}{2r_0} + r_0 + \frac{nr_0}{(n' \cos i' - n \cos i) \cos i}. \quad (847)$$

Но так как

$$\frac{h}{r_0} = -\operatorname{tg} \gamma; \quad \frac{h^2}{r_0^2} = \operatorname{tg}^2 \gamma; \quad \gamma = i, \quad (848)$$

то формула (847) может быть представлена в виде

$$s' = r_0 \left[ \frac{\operatorname{tg}^2 i}{2} + 1 + \frac{n}{(n' \cos i' - n \cos i) \cos i} \right]. \quad (849)$$

Полагая углы  $i$  равными нулю, находим отрезок  $s'_0$  для нулевого луча:

$$s'_0 = r_0 \left( 1 + \frac{n}{n' - n} \right) \quad (850)$$

и составляя разность между формулами (849) и (850), получаем величину сферической аберрации для параболической поверхности

$$\Delta s' = s' - s'_0 = r_0 \left[ \frac{\operatorname{tg}^2 i}{2} + \frac{n}{(n' \cos i' - n \cos i) \cos i} - \frac{n}{n' - n} \right]. \quad (851)$$

Опуская довольно громоздкие преобразования, можно формулу (851) представить в следующем виде:

$$\Delta s' = \frac{f'_0 (\cos i' - \cos i)}{2 (n' + n) \cos^2 i} [n' \cos i' + n \cos i + (n' + n) \cos i] \quad (852)$$

или

$$\Delta s' = \frac{f'_0}{2} \left( \frac{\cos i'}{\cos i} - 1 \right) \left[ \frac{n' \cos i' + n \cos i}{(n' + n) \cos i} + 1 \right]. \quad (853)$$

Формула (853) показывает, что в случае  $n > n'$  (преломление происходит из стекла в воздух) сферическая аберрация будет отрицательной.



## § 60. Сферическая aberrация плоско-параболической линзы в наклонных пучках

Величина меридиональной сферической aberrации в наклонных пучках характеризуется величиной радиуса  $R_{сф}$  эволюты каустики.

Полагая (фиг. 131), что при переходе от одного луча пучка к другому величина радиуса  $R_k$  каустики претерпевает некоторое приращение  $dR_k$ , можно определить величину  $R_{сф}$  как отношение

$$R_{сф} = \frac{dR_k}{du'} \quad (854)$$

Но как видно из формулы (830), общее выражение для радиуса  $R_k$  каустики уже достаточно сложно; поэтому обработка формулы (854) получится весьма громоздкой; вместе с тем, сравнительно легко можно получить качественное представление об изменении величины меридиональной сферической aberrации, руководствуясь некоторыми общими соображениями. Порядок же величины меридиональной сферической aberrации можно установить численным расчетом хода лучей через параболическую поверхность.

На фиг. 132 показано преломление двух параллельных пучков лучей на одном и том же участке параболической поверхности с углами падения и преломления главных лучей, равными по величине, но противоположными по знаку.

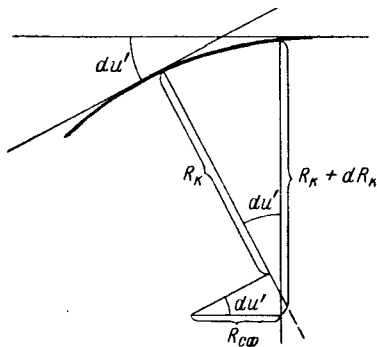
Оба пучка имеют различную по величине кому; однако сферическая aberrация в таких пучках, как четная, будет одинакова (для обоих пучков одна и та же величина радиуса эволюты каустики). Вместе с тем величина входного полевого угла  $\beta_1$  для дальнего положения входного зрачка будет по абсолютной величине меньше полевого угла  $\beta_2$  для ближнего положения входного зрачка — на величину удвоенного угла падения  $2i$ .

Полагая величину входного отверстия для обоих положений зрачков одинаковой, можно показать, что сечения обоих пучков, перпендикулярные их главным лучам, получатся различными, причем пучок, проходящий через дальний зрачок, несколько шире, чем проходящий через ближний зрачок.

Ширина того и другого пучка определяется соотношением

$$\frac{\rho_{/1}}{\cos \beta_1} = \frac{\rho_{/2}}{\cos \beta_2} \quad (855)$$

Ввиду этого меридиональная поперечная сферическая aberrация в плоскости, перпендикулярной главному лучу, несколько меньше для ближнего положения зрачка, чем для дальнего.



Фиг. 131. Определение радиуса эволюты каустики.

Величина расстояния вдоль луча (до фокусов бесконечно тонких пучков) в случае отсутствия астигматизма получается для обоих положений зрачков одинаковой и равной согласно формуле (791)

$$t' = s' = \frac{n'r_s}{n' \cos i' - n \cos i}; \quad (856)$$

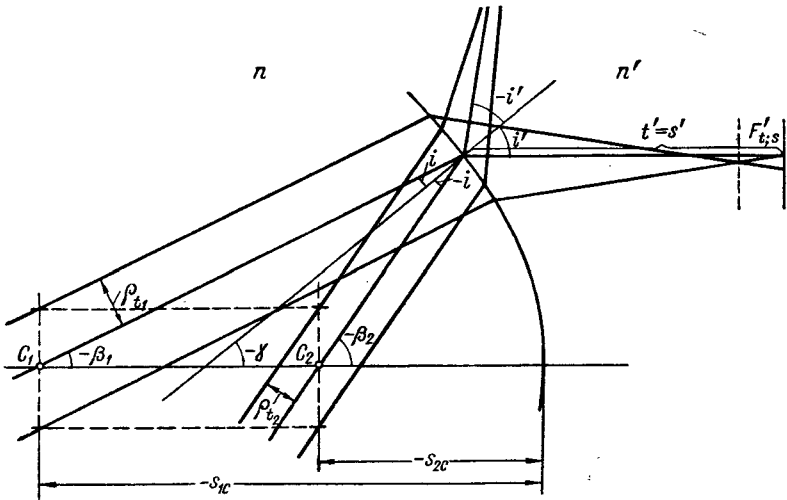
помня, что расстояние до фокуса осевого нулевого пучка системы определяется формулой

$$s'_0 = \frac{n'r_0}{n' - n}, \quad (857)$$

можно составить отношение

$$\frac{t'}{s'_0} = \frac{r_s}{r_0} \frac{n' - n}{n' \cos i' - n \cos i} = \frac{n' - n}{(n' \cos i' - n \cos i) \cos i'} > 1, \quad (858)$$

которое показывает, что расстояния до фокусов вдоль главного луча больше, чем расстояние до фокуса на оси системы. Поэтому вдоль глав-



Фиг. 132. Сферическая aberrация параболической поверхности в наклонных пучках.

ного луча при одной и той же ширине наклонного и осевого пучков выходная апертура в наклонных пучках меньше, чем в осевом пучке. Следовательно, и меридиональная сферическая aberrация в наклонных пучках меньше, чем поперечная сферическая aberrация в осевом пучке.

Все высказанные выше соображения подтверждаются величинами поперечных сферических aberrаций, вычисленных для плоско-параболической линзы со следующими данными:

$$\begin{aligned} r_1 &= \infty \\ d &= 29,63 \quad n = 1,5163 \quad S'_0 = f'_0 = 100,0 \\ [r_0]_2 &= -51,63 \end{aligned}$$

Входные полевые углы для дальнего и ближнего положений зрачков соответственно равны  $-5^{\circ}37'28''$  и  $-27^{\circ}40'52''$ ; зрачки находятся от первой поверхности линзы на расстояниях, соответственно равных  $-81,2675$  и  $-1,1905$ .

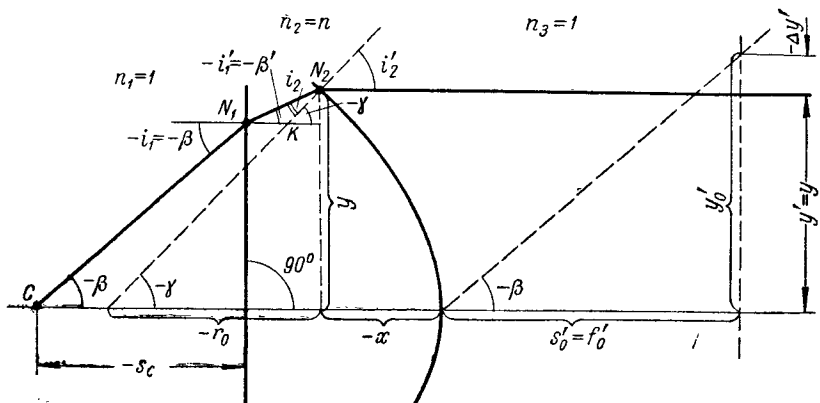
Величины поперечной сферической аберрации как для осевого, так и наклонных пучков приведены в табл. 19 для одной и той же высоты  $\rho_t$  на зрачках (перпендикулярно главным лучам).

Таблица 19

	Осевого пучок	Ближний зрачок	Дальний зрачок	Дальний зрачок
$s_1$	—	$-1,1905$	$-81,2675$	$-82,04$
$\beta_1$	$0^{\circ}$	$-27^{\circ}40'52''$	$-5^{\circ}37'28''$	$-7^{\circ}51'22''$
$\rho_t$	$+15$	$\pm 15$	$\pm 15$	$\pm 15$
$\sigma'_t$	$-0,866$	$\pm 0,735$	$\mp 0,713$	$\mp 1,28$

### § 61. Дисторсия плоско-параболической линзы

Ограничимся рассмотрением лишь одного частного случая — анастигматической плоско-параболической линзы с телецентрическим ходом главного луча (случай дальнего положения входного зрачка).



Фиг. 133. Дисторсия плоско-параболической линзы.

Рассмотрим фиг. 133, на которой показан ход главного луча через плоско-параболическую линзу, обращенную плоской стороной к предмету, лежащему в бесконечности.

Для дальнего положения входного зрачка, как было указано выше, условие исправления астигматизма приводит к телецентричности выходящего из линзы главного луча; поэтому величина изображения окажется равной ординате точки пересечения главным лучом параболической поверхности линзы. Полагая радиус кривизны в вершине

параболы равным  $r_0$  и, пользуясь известным свойством параболы, находим:

$$y' = +r_0 \operatorname{tg} \gamma. \quad (859)$$

Далее, из фиг. 133 нетрудно установить соотношение

$$-\gamma = -\beta' + i_2, \quad (860)$$

откуда

$$\beta' = i_2 + \gamma = i_2 - i_2'. \quad (861)$$

Пользуясь законом преломления, можно найти и входной полевой угол  $\beta$ . Получаем:

$$\sin \beta = n \sin \beta' = n [\sin i_2 \cos i_2' - \sin i_2' \cos i_2] \quad (862)$$

и после некоторых преобразований:

$$\sin \beta = \sin i_2' [\cos i_2' - n \cos i_2]. \quad (863)$$

Имея угол  $\beta$ , можно получить и величину неискаженного изображения  $y_0'$ :

$$y_0' = -f_0' \operatorname{tg} \beta = \frac{r_0}{n-1} \operatorname{tg} \beta. \quad (864)$$

Составляя разность величин  $y'$  и  $y_0'$ , находим дисторсию:

$$\Delta y' = y' - y_0' = -r_0 \left[ -\operatorname{tg} \gamma + \frac{\operatorname{tg} \beta}{n-1} \right]. \quad (865)$$

Деля формулу (865) на величину неискаженного изображения  $y_0'$ , получим относительную дисторсию:

$$\Delta^0 \% = - \left[ 1 - (n-1) \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta} \right] \cdot 100. \quad (866)$$

Из формулы (859) следует, что при сохранении неизменной величины радиуса  $r_0$  и  $\operatorname{tg} \gamma$  величина действительного изображения будет сохраняться постоянной.

При изменении в формуле (863) показателя преломления  $n$  изменится величина входного полевого угла  $\beta$ , причем одновременно будет изменяться и величина фокусного расстояния  $f_0'$ .

Вследствие этого произойдет изменение величины неискаженного изображения  $y_0'$  (в противном случае изменение тангенса входного полевого угла была бы пропорционально  $n-1$ ), что приведет к изменению дисторсии.

Изменение дисторсии при различных значениях полевых углов и показателей преломления показано в табл. 20.

Таблица 20

$n = 1,61$		$n = 1,581$		$n = 1,5492$	
$2\beta$	$\Delta$ в %	$2\beta$	$\Delta$ в %	$2\beta$	$\Delta$ в %
$33^\circ 22'$	+ 0,1	$60^\circ 0'$	+ 0,7	$56^\circ 42'$	+ 1,8
$106^\circ 00'$	- 7,9	$90^\circ 40'$	- 1,0	$94^\circ 0'$	+ 2,4
		$128^\circ 0'$	- 14,85	$119^\circ 0'$	- 3,08

Из рассмотрения табл. 20 видно, что при соответственном подборе показателя преломления для плоско-параболической линзы можно добиться исправления дисторсии почти для поля зрения  $120^\circ$ .

Такая плоско-параболическая линза свободна от астигматизма на таком же большом поле зрения, имеет небольшие сферическую aberrацию и кому и обладает телецентрическим ходом и удалением входного зрачка, почти равным ее фокусному расстоянию при большом свободном расстоянии до задней фокальной плоскости. В связи с этим можно рекомендовать ее (конечно, при условии введения в линзу хроматического радиуса) в качестве универсального широкоугольного окуляра.

### § 62. Несферические коррекционные пластинки. Коррекционная пластинка Шмидта. Выравнивающее стекло с деформированной поверхностью для исправления дисторсии

По своей идее пластинка Шмидта может рассматриваться как тонкий коррекционный элемент с нулевой силой — тонкий афокальный элемент, расположенный в зрачке (точнее, в плоскости действующей диафрагмы) оптической системы.

Благодаря установке в зрачке коррекционная пластинка Шмидта не будет влиять на астигматизм и кривизну поля основной системы. Придавая одной из поверхностей такой коррекционной пластинки соответственный профилей, можно влиять на изменение сферической aberrации системы.

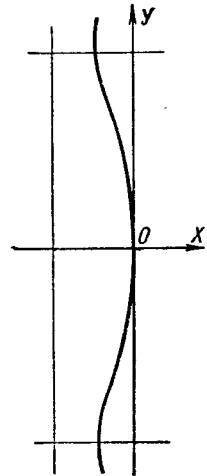
Условие афокальности приводит к тому, что при сохранении одной из поверхностей пластинки плоской, вторая поверхность также должна иметь в своей вершине радиус кривизны, равный бесконечности; поэтому профиль коррекционной поверхности примет вид параболической кривой высшего порядка:

$$x = By^4 + Cy^6 + \dots \quad (867)$$

На фиг. 134 показана пластинка с деформированной поверхностью. Изменение формы этой деформированной поверхности относительно исходной плоскости создаст некоторое изменение разности хода в пучке, проходящем через пластинку. Полагая, что профиль деформированной поверхности пластинки мало отличается от плоскости, можно принять, что создаваемая деформацией разность хода определится величинами деформации (для параллельного пучка лучей или плоской волны разность хода строго пропорциональна величинам деформации).

Тогда нетрудно определить и величину волновой aberrации, вносимой деформацией поверхности:

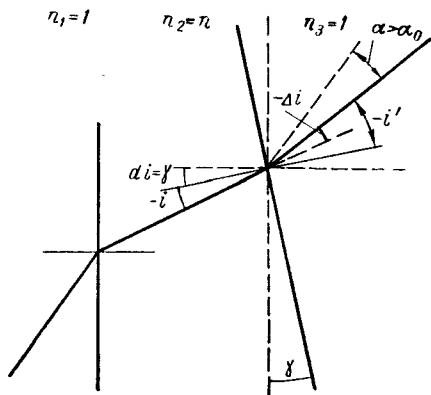
$$\varepsilon = (n - 1) x = (n - 1) [By^4 + Cy^6 + \dots]. \quad (868)$$



Фиг. 134. Коррекционная пластинка с несферической поверхностью.

Формула (868) позволяет по известной величине сферической аберрации системы, выраженной в волновой форме, определить необходимую для ее компенсации деформацию одной из плоскостей коррекционной пластинки Шмидта.

Устраняя сферическую аберрацию на оси системы с помощью пластинки Шмидта не всегда удается устранить сферическую аберрацию по полю зрения, так как величина сферической аберрации для пластинки Шмидта изменяется с изменением угла наклона пучка лучей, падающего на пластинку.



Фиг. 135. Определение угла отклонения для элемента коррекционной пластинки.

Какой-либо элемент пластинки Шмидта можно рассматривать как некоторый клин с малым преломляющим углом; осевой пучок падает на такой клин под малыми углами. Что касается лучей наклонных пучков, то для них нельзя уже пренебрегать величиной полевых углов и их влияние необходимо учитывать.

Влияние величины полевых углов в наклонных пучках прежде всего выражается в том, что ширина наклонного пучка, проходящего через те же самые элементы

пластинки Шмидта, уменьшится пропорционально косинусу полевого угла; но, кроме того, будут увеличиваться углы отклонения лучей при наклонном ходе через элементарные клинья.

Наклонный ход луча через клин с малым преломляющим углом может быть получен из хода луча через плоскопараллельную пластинку с помощью поворота второй плоскости на малый угол  $\gamma$ , что равносильно изменению угла отклонения луча при изменении угла падения  $i$  на тот же угол  $\gamma$ .

На фиг. 135 показан ход преломленного клином луча до (пунктиром) и после поворота второй плоскости на угол  $\gamma$ . Из фигуры видно, что в этом случае произойдет изменение угла падения  $di$ , равное углу  $\gamma$  поворота второй плоскости.

Из фиг. 135 следует:

$$\Delta i = i' - i; \quad (869)$$

дифференцируя, находим угол отклонения луча, создаваемый пластинкой:

$$\alpha = d\Delta i = di' - di. \quad (870)$$

Дифференцируя закон преломления, получаем:

$$n \cos i \, di = n' \cos i' \, di'; \quad \frac{di}{\operatorname{tg} i} = \frac{di'}{\operatorname{tg} i'}, \quad (871)$$

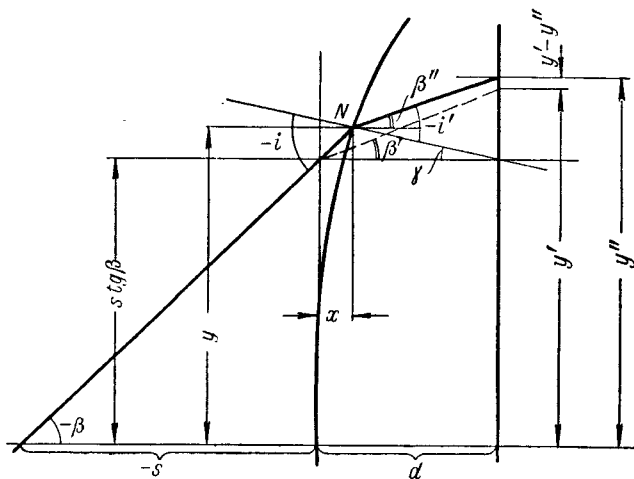
откуда, полагая  $n' = 1$ , находим:

$$\alpha = \left( \frac{\operatorname{tg} i'}{\operatorname{tg} i} - 1 \right) di = \left( n \frac{\cos i}{\cos i'} - 1 \right) \gamma > (n - 1) \gamma = \alpha_0, \quad (872)$$

где угол  $\gamma$  может быть найден как производная от кривой профиля деформированной поверхности:

$$\gamma = \frac{dx}{dy} = 4By^3 + 6Cy^5 + \dots \quad (873)$$

Перейдем к рассмотрению выравнивающего стекла с деформированной для исправления дисторсии поверхностью. Такое стекло может быть использовано в аэрофотоаппаратах, где имеется плоскопараллельная пластинка для выравнивания аэропленки, когда плоская поверхность пластинки совмещается с плоскостью изображения,



Фиг. 136. Работа коррекционной пластинки, предназначенной для исправления дисторсии.

а деформированная поверхность располагается вблизи поверхности изображения.

Своеобразие этого случая заключается в том, что здесь существенное значение имеет толщина коррекционной пластинки, тогда как в пластинке Шмидта влияние толщины коррекционной пластинки не ощутимо.

На величину изменения дисторсии после коррекционной пластинки влияют следующие факторы:

- 1) толщина пластинки (основная);
- 2) изменение толщины пластинки для разных участков поля зрения;
- 3) изменение угла главного луча, преломленного деформированной поверхностью, с осью системы.

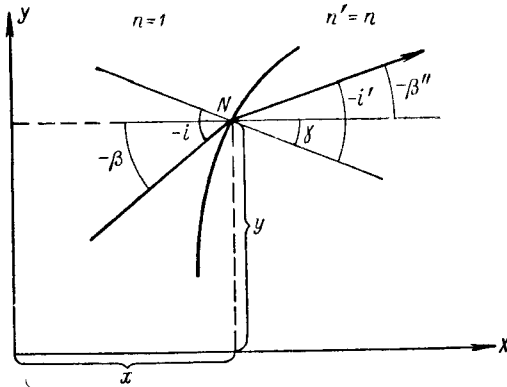
Предположим, что показатель преломления пластинки является постоянным, коррекционная пластинка совмещена своей плоской поверхностью с плоскостью изображения, и поле зрения (углы главных лучей с осью системы) достаточно большое.

На фиг. 136 (пунктиром) показан ход главного луча через плоскопараллельную пластинку, причем главный луч пересекает плоскость изображения на расстоянии  $y'$  от оси системы. После деформирования

первой поверхности, выполненного согласно уравнению

$$x = Ay^2 + By^4 + \dots \quad (874)$$

ход главного луча показан сплошной линией, и расстояние точки пересечения этого главного луча от оси системы в плоскости изображения представлено величиной  $y''$ .



Фиг. 137. Вспомогательный чертеж.

Из фиг. 136 следует:

$$y'' = y - (d - x) \operatorname{tg} \beta'', \quad (875)$$

$$y' = s \operatorname{tg} \beta - d \operatorname{tg} \beta'. \quad (876)$$

Кроме того,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{s - x}. \quad (877)$$

Поэтому формулу (876) можно представить в виде

$$\begin{aligned} y' &= \frac{sy}{s - x} - d \operatorname{tg} \beta' = \\ &= \frac{y}{1 - \frac{x}{s}} - d \operatorname{tg} \beta'. \quad (878) \end{aligned}$$

Определим величину разности:

$$y'' - y' = y \left[ 1 - \frac{1}{1 - \frac{x}{s}} \right] - (\operatorname{tg} \beta'' - \operatorname{tg} \beta') d + x \operatorname{tg} \beta''. \quad (879)$$

Но формула (879) может быть преобразована в виде

$$y'' - y' = y \frac{-\frac{x}{s}}{1 - \frac{x}{s}} - (\operatorname{tg} \beta'' - \operatorname{tg} \beta') d + x \operatorname{tg} \beta'' \quad (880)$$

или

$$y'' - y' = -x \operatorname{tg} \beta - (\operatorname{tg} \beta'' - \operatorname{tg} \beta') d + x \operatorname{tg} \beta'' \quad (881)$$

и окончательно:

$$y'' - y' = (\operatorname{tg} \beta'' - \operatorname{tg} \beta) x - (\operatorname{tg} \beta'' - \operatorname{tg} \beta') d. \quad (882)$$

Заметим, что формула (882) является точной.

Рассмотрим разность тангенсов во втором члене формулы (882). На фиг. 137 показано положение нормали деформированной поверхности в некоторой точке  $N$  с координатами  $x$  и  $y$ .

Для угла поворота нормали  $\gamma$  имеем:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{dx}{dy} = 2Ay + 4By^3 + \dots \quad (883)$$

Согласно закону преломления следует:

$$n \sin i = n' \sin i'. \quad (884)$$

В нашем случае  $n = 1$  и  $n' = n$ . Поэтому

$$\sin i = \sin(\beta - \gamma) = n \sin(\beta'' - \gamma) \quad (885)$$



или

$$\sin \beta \cos \gamma - \sin \gamma \cos \beta = n \sin \beta'' \cos \gamma - n \cos \beta'' \sin \gamma. \quad (886)$$

Если угол  $\gamma$  мал, то формулу (886) можно привести к виду

$$\sin \beta - \gamma \cos \beta = n \sin \beta'' - \gamma n \cos \beta'', \quad (887)$$

а при  $\gamma = 0$   $\beta''$  переходит в  $\beta'$ , и формула (887) приводится к закону преломления

$$\sin \beta = n \sin \beta' \quad (888)$$

и поэтому формулу (887) можно преобразовать в виде

$$n (\sin \beta' - \sin \beta'') = \gamma (\cos \beta - n \cos \beta''). \quad (889)$$

Деля обе части формулы (889) на  $n \cos \beta''$  и помня, что из этой же формулы следует близость  $\beta'$  и  $\beta''$ , находим:

$$\frac{\sin \beta'}{\cos \beta''} - \operatorname{tg} \beta'' = \gamma \left[ \frac{\cos \beta}{n \cos \beta''} - 1 \right] \quad (890)$$

или

$$\operatorname{tg} \beta'' - \operatorname{tg} \beta' \approx \gamma \left[ 1 - \frac{\cos \beta}{n \cos \beta'} \right]. \quad (891)$$

На основании формулы (891) можно уравнение (882) представить в виде

$$y'' - y' = (\operatorname{tg} \beta'' - \operatorname{tg} \beta) x - \gamma \left( 1 - \frac{\cos \beta}{n \cos \beta'} \right) d \quad (892)$$

или, заменяя в первом члене  $\operatorname{tg} \beta''$  на  $\operatorname{tg} \beta'$ , в виде:

$$y'' - y' = (\operatorname{tg} \beta' - \operatorname{tg} \beta) x - \gamma \left( 1 - \frac{\cos \beta}{n \cos \beta'} \right) d. \quad (893)$$

Вынося за скобку в первом члене  $\operatorname{tg} \beta$ , находим:

$$y'' - y' = - \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} \beta'}{\operatorname{tg} \beta} \right) x \operatorname{tg} \beta - \gamma \left( 1 - \frac{\cos \beta}{n \cos \beta'} \right) d \quad (894)$$

и окончательно:

$$y'' - y' = - \left( 1 - \frac{\cos \beta}{n \cos \beta'} \right) (x \operatorname{tg} \beta + \gamma d) = (\operatorname{tg} \beta' - \operatorname{tg} \beta) \left[ x + \frac{\gamma d}{\operatorname{tg} \beta} \right]. \quad (895)$$

Формула (895) может быть представлена как функция от величины  $y$ . Тогда согласно формулам (874) и (883)

$$y'' - y' = - \left( 1 - \frac{\cos \beta}{n \cos \beta'} \right) \left[ (Ay^2 + By^4 + \dots) \operatorname{tg} \beta + (2Ay + 4By^3 + \dots) d \right]. \quad (896)$$

Задавая ряд значений величин  $y'' - y'$  для соответственных углов  $\beta$  и  $\beta'$  и ординат  $y$ , получаем систему линейных уравнений для коэффициентов  $A, B, C, \dots$  решая которую найдем значения этих коэффициентов.

Для ряда оптических систем с достаточно большими полями зрения величина  $\operatorname{tg} \beta$  довольно близка к единице; поэтому множители при

коэффициентах  $A$  и  $B$  в первом и втором членах формулы (896) отличаются друг от друга как величины отношений

$$\frac{y}{2d}; \quad \frac{y}{4d}, \quad (897)$$

которые в несколько раз больше единицы; это позволяет в первом приближении пренебрегать в формулах (895) и (896) вторым членом, в который входит толщина  $d$  выравнивающей пластинки.

## Глава XVII

### РАБОТА СКЛЕЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

#### § 63. Астигматизм, вносимый склеенной поверхностью

Поверхность склейки, разделяющая две среды с различными показателями преломления, является наряду с прогибом линзы широко распространенным коррекционным элементом.

Обращаясь к формуле для оптической силы преломляющей поверхности на оси системы, видим, что сила склеенной поверхности тем меньше, чем меньше разность показателей преломления сред, разделяемых этой поверхностью.

Имея в виду, что разность показателей преломления для различных марок оптического стекла весьма невелика и составляет около 0,1 (редко 0,15 или 0,20), легко убеждаемся, что оптическая сила склеенной поверхности всегда мала. Это позволяет принимать склеенную поверхность за коррекционный элемент, поскольку коррекционными называются такие элементы, которые обладают оптической силой, равной нулю (например, прогиб линзы или деформация поверхности) или достаточно малой по отношению к силе других элементов системы.

Чтобы рассмотреть астигматизм, вносимый склеенной поверхностью, обратимся к астигматическим инвариантам:

$$\left. \begin{aligned} \frac{n' \cos^2 i'}{t'} - \frac{n \cos^2 i}{t} &= \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r} = n' \varphi \\ \frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} &= \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r} = n' \varphi \end{aligned} \right\} \quad (898)$$

В случае равенства углов  $i$  и  $i'$  нулю обе формулы переходят в известный инвариант Аббе:

$$\frac{n'}{s'_0} - \frac{n}{s_0} = \frac{n' - n}{r} = n' \varphi_0. \quad (899)$$

Величины  $\varphi$  и  $\varphi_0$  будем называть силой поверхности для наклонного и осевого пучков лучей.

Полагая величины  $t$  и  $s$  равными бесконечности и обозначая обратные величины  $1/t'$  и  $1/s'$  соответственно меридиональной и сагит-

тальной силами поверхности, получим:

$$\varphi_t = \frac{1}{t'} = \frac{\varphi}{\cos^2 i'}; \quad \varphi_s = \frac{1}{s'} = \varphi. \quad (900)$$

Умножим теперь числитель и знаменатель выражения для силы поверхности в наклонном пучке на величину  $n' \cos i' + n \cos i$ . Тогда

$$n' \varphi = \frac{n'^2 \cos^2 i' - n^2 \cos^2 i}{r (n' \cos i' + n \cos i)} = \frac{n'^2 - n^2}{r (n' \cos i' + n \cos i)} \quad (901)$$

или

$$n' \varphi = \frac{n' - n}{r} \cdot \frac{n' + n}{n' \cos i' + n \cos i} = n' \varphi_0 \frac{n' + n}{n' \cos i' + n \cos i}, \quad (902)$$

откуда

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{\cos i} \cdot \frac{n' + n}{n' \frac{\cos i'}{\cos i} + n}. \quad (903)$$

Если для нашей поверхности разность показателей преломления мала, то отношение  $\cos i'$  к  $\cos i$  будет отличаться от единицы на величину первого порядка малости.

Поэтому в случае малой разности показателей формула (903) переходит в приближенную формулу:

$$\varphi \approx \frac{\varphi_0}{\cos i}, \quad (904)$$

Из формулы (900) легко получить выражения для меридиональной и сагиттальной сил поверхности:

$$\varphi_t = \frac{\varphi_0}{\cos^3 i}; \quad \varphi_s = \frac{\varphi_0}{\cos i}. \quad (905)$$

Далее из формул (898) можно написать:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos^2 i'}{\cos^2 i} \cdot \frac{n'}{t'} - \frac{n}{t} = n' \varphi_t \approx n' \frac{\varphi_0}{\cos^3 i} \approx \frac{n'}{t'} - \frac{n}{t} \\ \frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = n' \varphi_s \approx n' \frac{\varphi_0}{\cos i} \end{aligned} \right\} \quad (906)$$

Из формул (906) следует, что в случае равенства отрезков  $t$  и  $s$  бесконечности и в случае малости разности показателей  $n' - n$  имеет место малость величин  $1/t'$  и  $1/s'$  или, что то же, величины  $t'$  и  $s'$  велики по отношению к величине  $r$ .

Поэтому, переходя к рассмотрению совместной работы в системе двух склеенных поверхностей, расположенных друг за другом, можно полагать, что расстояния между обеими поверхностями как по оси системы (толщины линз), так и вдоль главных лучей («косые» толщины) всегда значительно меньше радиусов кривизны склеенных поверхностей и, следовательно, подавно меньше отрезков  $t'_1$  и  $s'_1$  после первой поверхности.

В силу этого имеются все основания пренебрегать влиянием «косых» толщин и право приравнивать отрезки вдоль главного луча после предыдущей поверхности склейки отрезкам перед последующей поверхностью —  $t_2$  и  $s_2$ . Таким образом,

$$\bar{d} \ll t'; \quad -\bar{d} \ll s'; \quad t'_1 \approx t_2; \quad s'_1 \approx s_2. \quad (907)$$

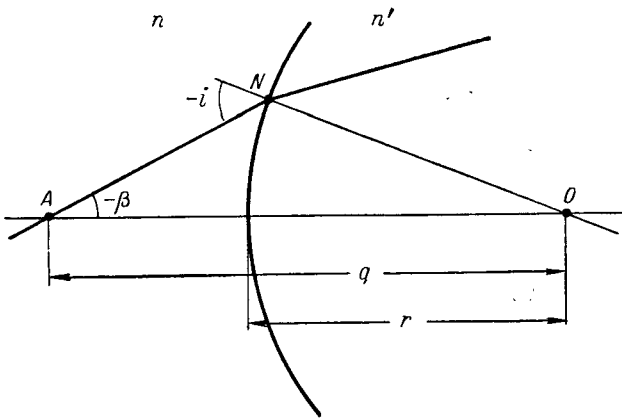
Пользуясь выражениями (906) для обеих склеенных поверхностей и имея в виду равенства (907), находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{n_3}{t'_2} - \frac{n_1}{t_1} &= \frac{n_3 \varphi_{02}}{\cos^3 i_2} + \frac{n_2 \varphi_{01}}{\cos^3 i_1} = n_3 \varphi_t \\ \frac{n_3}{s'_2} - \frac{n_1}{s_1} &= \frac{n_3 \varphi_{02}}{\cos i_2} + \frac{n_2 \varphi_{01}}{\cos i_1} = n_3 \varphi_s \end{aligned} \right\} \quad (908)$$

или, помня, что все  $n$  мало отличаются друг от друга,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_t &\approx \frac{\varphi_{02}}{\cos^3 i_2} + \frac{\varphi_{01}}{\cos^3 i_1} \\ \varphi_s &\approx \frac{\varphi_{02}}{\cos i_2} + \frac{\varphi_{01}}{\cos i_1} \end{aligned} \right\} \quad (909)$$

Перейдем теперь к рассмотрению работы склеенных поверхностей в оптической системе.



Фиг. 138. Определение углов падения луча на склеенную поверхность.

Нетрудно себе представить, что влияние склеенной поверхности будет целиком определяться отличием сил  $\varphi_t$  и  $\varphi_s$  от силы  $\varphi_0$  на оси системы; это же отличие, в свою очередь, будет определяться ростом углов  $i$ .

Величины углов  $i$  связываются (согласно фиг. 138), следующим соотношением:

$$\sin i = \frac{q}{r} \sin \beta, \quad (910)$$

где величина  $q$  — расстояние между точкой пересечения главного луча с осью системы и центром рассматриваемой поверхности.

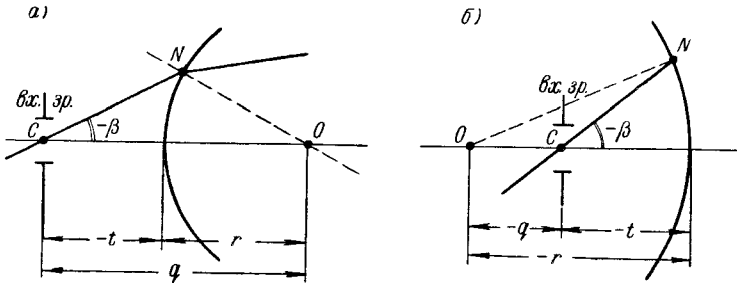
Рассматривая формулу (910), видим, что величина  $\sin i$  при постоянном полевом угле  $\beta$  зависит от отношения величин  $q$  и  $r$  и растет с ростом величины  $q$  и уменьшением величины  $r$ .

Необходимо обратить внимание на следующее обстоятельство. Сохраняя неизменными ход главного луча, положение вершины пре-

ломляющей поверхности и абсолютное значение ее радиуса кривизны, можно изменить знак радиуса кривизны, иными словами, сделать преломляющую поверхность выпуклой или вогнутой (см. фиг. 139, а, б) или, как принято говорить, изменить ориентировку вогнутости поверхности или ее центра кривизны относительно зрачка.

Условимся различать *прямую* ориентировку, когда преломляющая поверхность обращена к зрачку вогнутостью, и *обратную*, когда поверхность обращена к зрачку выпуклой стороной.

Из чертежа видно, что при переходе от прямой ориентировки к обратной значение  $q$  в числителе формулы (910) возрастает по своей



Фиг. 139. Ориентировка склеенной поверхности.

абсолютной величине на удвоенный радиус кривизны. При этом сила  $\Phi_0$  поверхности на оси системы остается неизменной. Отсюда совершенно ясно, что одним из приемов активизации работы склеенной поверхности является использование обратной ориентировки поверхности склейки.

Если склеенная поверхность, имеющая обратную ориентировку, приближается к зрачку, то ее влияние постепенно ослабевает, так как отношение  $q/r$  приближается по абсолютной величине к единице; когда такая поверхность перейдет положение зрачка, она изменит свою ориентировку на прямую с дальнейшим уменьшением отношения  $q/r$ , которое станет меньше единицы.

В зависимости от знака величины  $\Phi_0$  будем различать «н о р м а л ь н ы е» склейки, обладающие отрицательными силами  $\Phi_0$ , и «а н о м а л ь н ы е» склейки, обладающие положительными силами.

Возвратимся к формуле (910). Можно показать, что с постепенным ростом полевого угла наблюдается постепенный рост синуса угла  $i$ .

При малых углах  $i$  рост синуса  $i$  более или менее пропорционален росту самого угла  $i$ , но постепенно рост угла  $i$  ускоряется. При этом уменьшается косинус  $i$  и соответственно возрастают силы  $\Phi_s$  и  $\Phi_t$  (по отношению к  $\Phi_0$ ).

Следует заметить, что тогда, когда синус  $i$  станет достаточно велик, начнется весьма быстрый рост сил  $\Phi_s$  и  $\Phi_t$ , существенно обгоняющий рост полевого угла. Таким образом, влияние склеенной поверхности сильно сказывается на краю поля зрения и слабее в средней части поля.

Рассмотрим теперь частный случай работы склеенной поверхности в плоско-выпуклой линзе, когда выходной зрачок совпадает с центром второй преломляющей поверхности, благодаря чему эта поверхность не вносит астигматизма.

Остановившись, в частности, на случае нормальной склейки (исключая концентричность склеенной поверхности выходному зрачку), сразу же можно установить следующее. Отрезки вдоль главного луча после склеенной поверхности для сагиттального и меридионального пучков не могут быть равны друг другу, так как оптическая сила  $\varphi_t$  поверхности в меридиональной плоскости всегда по абсолютному значению больше силы оптической поверхности  $\varphi_s$  в сагиттальной плоскости. Так как обе силы отрицательны (т. е.  $|\varphi_t| > |\varphi_s|$ , а  $\varphi_t < 0$  и  $\varphi_s < 0$ ), то меридиональное изображение перед последней поверхностью располагается ближе к поверхности, чем сагиттальное (так как  $s' < 0$ ,  $t' < 0$  и  $|-t'| < |-s'|$ , то  $t' > s'$  и  $t' - s' > 0$ ); следствием этого является возникновение положительного астигматизма, так как последняя поверхность сама по себе, как уже говорилось, не может внести астигматизм.

Рассматривая далее изменение астигматизма в связи с изменением положения входного зрачка и помня, что обе астигматические кривые касались друг друга при совпадении выходного зрачка с центром второй поверхности, приходим к заключению, что после введения нормальной склейки астигматические кривые должны будут пересечь друг друга (так как иначе невозможно получение положительного астигматизма) и мы сможем найти для такой склеенной линзы уже не одно, а два положения входного зрачка, обеспечивающих исправление астигматизма для заданного угла поля зрения.

Переходя затем к меньшему углу поля зрения, где влияние склеенной поверхности значительно слабее, наблюдаем ту же самую картину пересечения астигматических кривых, но значительно более слабо выраженную, с меньшим расхождением положений входных зрачков, дающих исправление астигматизма, нежели в первом случае.

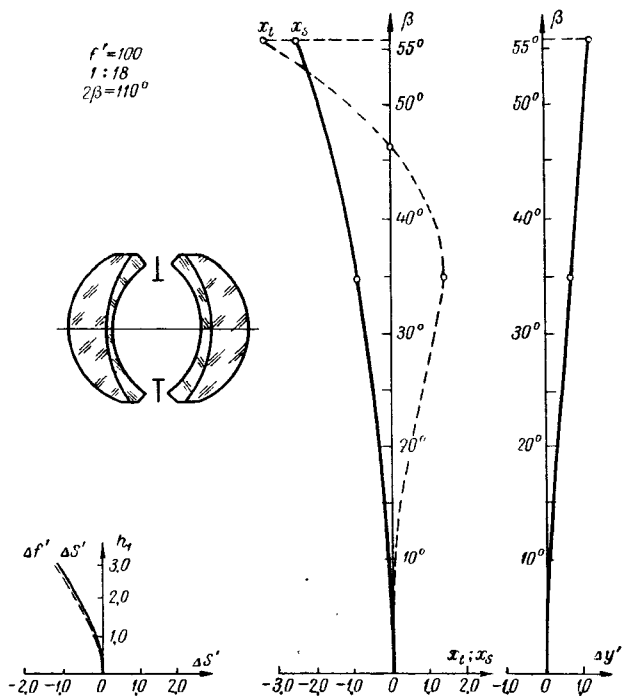
Поэтому при исправлении астигматизма на краю поля зрения мы встречаемся в средней части поля зрения с отрицательными зонами астигматизма, аналогично случаю работы мениска при ближнем положении входного зрачка.

В случае аномальной склейки очевидно будет обратный результат; прибегая к тем же самым рассуждениям, можно показать, что введение аномальной склейки в плоско-выпуклой линзе с последней поверхностью, концентричной выходному зрачку, приведет нас к возникновению отрицательного астигматизма, в силу чего обе астигматические кривые не только не будут касаться друг друга, но и вообще не будут пересекаться.

Однако, вводя аномальную склейку в менискообразную линзу, где астигматические кривые пересекались друг с другом, мы обнаруживаем сближение анастигматических зрачков; одновременно в средней части поля зрения сближение зрачков наблюдается в значительно меньшей степени, благодаря чему при исправлении астигматизма на

краю поля в средней части поля зрения образуются положительные астигматические зоны.

Учитывая, что простому мениску свойственно наличие положительных зон астигматизма при дальнем положении входного зрачка и от-



Фиг. 140. Объектив ГОИ.

рицательных зон при ближнем положении зрачка, целесообразно вводить нормальные склейки в мениски, работающие с дальним положением входного зрачка, и аномальные склейки в мениски, работающие с ближним положением этого зрачка.

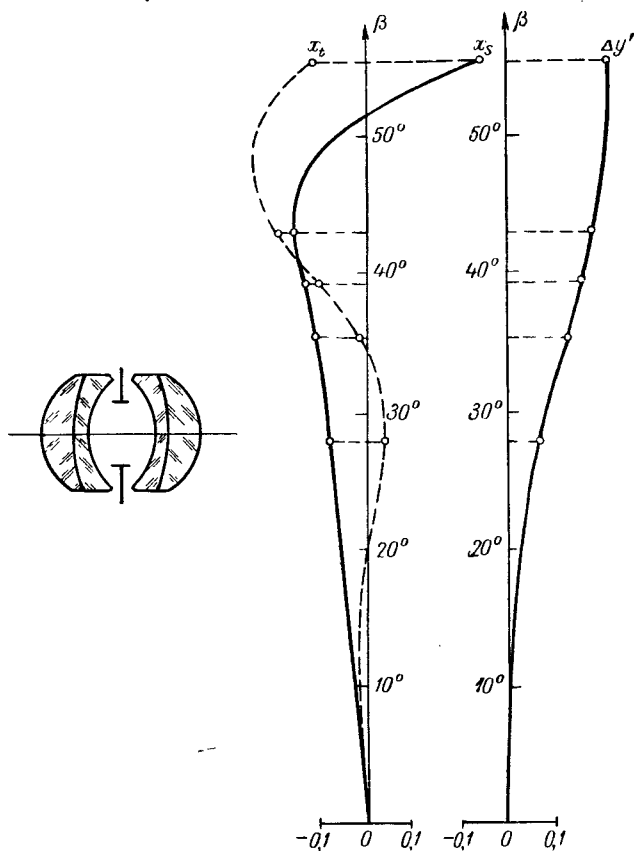
Для иллюстрации сказанного рассмотрим в качестве примера введение нормальной склейки в широкоугольный объектив ГОИ по расчету Е. Ежовой (фиг. 140)<sup>1</sup>. Данные передней половинки этого объектива следующие:

$$\begin{aligned}
 r_1 = -r_6 &= 20,8 & d_1 = d_5 &= 9,3 & n_2 &= 1,613 \\
 r_2 = -r_5 &= 32,1 & d_2 = d_4 &= 2,1 & n_3 &= 1,613 \\
 r_3 = -r_4 &= 21,6 & d_3 &= 11,5 & &
 \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Г. Г. Слюсарев. Методы расчета оптических систем, ОНТИ, 1937.

Для всего объектива  $f'_0 = 100,40$ ;  $s'_F = 71,05$ .

Для половинки  $f' = 142,801$ ;  $s' = 113,057$ .



$\beta$	$x_t$	$x_s$	$\Delta y$
$55^{\circ}21'$	- 0,11	0,25	0,22
$43^{\circ}13'$	- 0,19	- 0,16	0,19
$39^{\circ}23'08''$	- 0,11	- 0,13	0,16
$35^{\circ}37'51''$	- 0,015	- 0,11	0,13
$28^{\circ}17'40''$	0,035	- 0,08	0,07

Фиг. 141. Введение нормальной склейки в объективе из двух менисков.

Так как этот объектив был построен на основе использования мениска, работающего с дальним положением входного зрачка, он обладал положительными астигматическими зонами (фиг. 140).



Введение нормальной склейки привело к созданию следующей системы:

$$\begin{aligned} r_1 = -r_6 = 14,205 & & d_1 = d_6 = 7,0 & & n_2 = 1,5163 \\ r_2 = -r_5 = 33,0 & & d_2 = d_4 = 3,0 & & n_3 = 1,6128 \\ r_3 = -r_4 = 15,26 & & & & \\ & & \frac{d_3}{2} = 7,245 & & \end{aligned}$$

Для всего объектива  $f'_0 = 86,4723$ ;  $s'_F = 64,3708$ .

Для половинки  $f' = 121,1017$ ;  $s' = 92,0460$ .

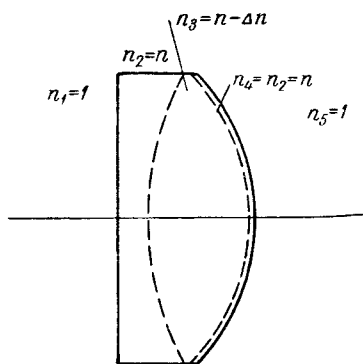
Эта система также состоит из двух симметричных половин и представлена на фиг. 141.

Из сопоставления графиков астигматизма обеих приведенных систем видно, что введение нормальной склейки действительно позволило почти полностью уничтожить положительную зону астигматизма, имевшую место в первой системе.

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. Возвращаясь к формуле (910), определяющей величину синуса  $i$ , видим, что в тех случаях, когда происходит уменьшение величины радиуса  $r$  по отношению к величине  $q$ , имеет место возрастание синуса  $i$ , ведущее к усилению действия склеенной поверхности даже и при сохранении ее силы на оси системы  $\Phi_0$  неизменной.

Подобное уменьшение радиусов кривизны склеенных поверхностей можно осуществить, пользуясь малой разностью показателей преломления для склеиваемых линз; в таких случаях, не нарушая существенно образом силы всей системы на оси, можно достаточно активно воздействовать на изменение зональных ошибок астигматизма (конечно при условии, что разность показателей все же сохранится достаточно большой для осуществления воздействия на астигматизм при использовании практически еще реальных значений радиусов кривизны).

Следует заметить также, что процесс введения склеенной поверхности нельзя рассматривать как добавление только одного нового элемента; необходимо помнить, что введение поверхности склейки в одиночной линзе всегда приводит к изменению показателя преломления на одной из поверхностей линзы, граничащей с воздухом; поэтому мы всегда должны говорить об одновременном введении двух поверхностей склейки: «реальной», с более или менее произвольным радиусом кривизны, и «фиктивной», у которой радиус кривизны будет равен радиусу одной из наружных поверхностей исходной линзы с той же разностью показателей, но с обратным знаком этой разности (фиг. 142).



Фиг. 142. Введение дополнительной поверхности склейки.

## § 64. Влияние склеенной поверхности на сферическую абберацию

Для преломляющей поверхности можно написать закон преломления:

$$n \sin i = n' \sin i' = (n + \Delta n) \sin (i + \Delta i), \quad (911)$$

Полагая разность показателей преломления малой и пренебрегая величинами второго порядка малости, получаем:

$$\Delta i = -\frac{\Delta n}{n'} \operatorname{tg} i. \quad (912)$$

Умножая числитель и знаменатель в формуле (912) на радиус кривизны поверхности  $r$ , находим:

$$\Delta i = -\frac{n' - n}{n'r} \cdot \frac{r \sin i}{\cos i} = -\frac{\varphi_0}{\cos i} r \sin i. \quad (913)$$

Но, согласно формуле (910), произведение  $r \sin i$  может быть заменено произведением  $q \sin u$  (в данном случае роль пологового угла  $\beta$  играет апертурный угол  $u$ ); тогда

$$\Delta i = -\varphi_s q \sin u, \quad (914)$$

где  $\varphi_s$  — сагиттальная сила поверхности склейки для рассматриваемого апертурного луча.

Для двух или нескольких склеенных поверхностей, следующих непосредственно одна за другой, можно получить величину суммарного угла отклонения луча:

$$\sum \Delta i = -\sum \varphi_s q \sin u. \quad (915)$$

Имея в виду, что изменение апертурного угла малое, можно принять для всех поверхностей склейки величину апертурного угла  $u$  постоянной, что может вызвать ошибку только высшего порядка малости; тогда, вынося величину  $\sin u$  за знак суммы, получим:

$$\sum \Delta i = -\sin u \sum \frac{\varphi_0}{\cos i} q. \quad (916)$$

Полученные нами формулы показывают, что изменение апертурных углов на склеенных поверхностях с достаточно большими значениями углов падения и преломления не может происходить равномерно по отношению к росту самого апертурного угла  $u$ ; эта неравномерность и обуславливает возникновение сферической абберации, вносимой поверхностями склейки. Для того чтобы выделить изменение апертурного угла, характеризующего сферическую абберацию склеенной поверхности, мы можем составить разность изменений апертурных углов, определяемых как с учетом влияния углов падения и преломления, так и без учета этого влияния. Тогда

$$\sum \Delta u - \sum \Delta u_0 = -\sin u \sum \varphi_0 q \left( \frac{1}{\cos i} - 1 \right). \quad (917)$$

Рассмотрим теперь работу склеенной поверхности, введенной в простую линзу.

Будем полагать конечными величины апертурных углов луча, проходившего через линзу до введения в нее склеенной поверхности; толщину линзы по отношению к фокусному расстоянию линзы (последнему отрезку) будем считать малой.

После введения в такую линзу склеенной поверхности перед последней поверхностью линзы произойдет некоторое изменение хода апертурного луча.

Имея в виду, что линза тонка, можно, не делая ошибки выше второго порядка малости, полагать, что изменение хода луча произойдет на самой последней поверхности.

Логарифмически дифференцируя формулу (910), находим:

$$\frac{di'}{\operatorname{tg} i'} = \frac{dq'}{q'} + \frac{du'}{\operatorname{tg} u'}, \quad (918)$$

откуда, помня, что

$$du' = di', \quad (919)$$

получаем

$$\frac{dq'}{q'} = \left( \frac{1}{\operatorname{tg} i'} - \frac{1}{\operatorname{tg} u'} \right) di' \quad (920)$$

или

$$dq'_m = - \frac{q'_m}{q_m} \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} i'_m}{\operatorname{tg} u'_m} \right) r_m \cos i_m \sum \frac{\varphi_0 q}{\cos i}. \quad (921)$$

Переходя к малым величинам  $i$ , можем получить изменение положения изображения для нулевых лучей. Находим:

$$dq'_0 = - \frac{q'_m}{q_m} \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} i'_m}{\operatorname{tg} u'_m} \right) r_m \cos i_m \sum \varphi_0 q. \quad (922)$$

Составляя разность величин  $dq'_m$  и  $dq'_0$ , выраженных формулами (921) и (922), получаем изменение величины сферической аберрации после внесения в линзу поверхностей склеек.

Отметим еще раз, что, вводя в какую-либо линзу склеенную поверхность, всегда нужно для сохранения разности показателей на первой или на последней поверхности линзы добавить вторую, «фиктивную», склеенную поверхность с радиусом кривизны, равным соответственно радиусу кривизны наружной поверхности.

Таким образом, для изменения величины сферической аберрации получаем

$$\begin{aligned} d\Delta s' &= -(dq'_m - dq'_0) = \\ &= \frac{q'_m}{q_m} \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} i'_m}{\operatorname{tg} u'_m} \right) r_m \cos i_m \sum \left( \frac{1}{\cos i} - 1 \right) \varphi_0 q. \end{aligned} \quad (923)$$

Формула (923) представляет собой общий случай. В этой формуле все величины с индексом  $m$  относятся к последней преломляющей поверхности.

Обратимся к частному случаю, когда апертурный луч перед последней преломляющей поверхностью идет параллельно оси системы.

В этом случае величина  $q_m$  обращается в бесконечность; к бесконечности будут стремиться и величины  $q$  под знаком суммы.

Таким образом, формула (923) переходит в неопределенность.

В рассматриваемом частном случае, когда апертурный угол  $u_m$  стремится к нулю, произведение  $q \sin u$  стремится к высоте луча на преломляющей поверхности  $h$ ; отсюда формула (913) может быть представлена в следующем виде:

$$\Delta i = \frac{h \varphi_0}{\cos i}. \quad (924)$$

Так как высоты на всех склеенных поверхностях в рассматриваемом случае мало отличаются друг от друга, величина  $h$  в формуле (924) может быть при суммировании вынесена за знак суммы. Тогда

$$\Delta i_m = h \sum \frac{\varphi_0}{\cos i} = h \sum \varphi_s. \quad (925)$$

Обращаясь далее к формуле (920), можно ее представить в следующем виде:

$$dq'_m = q'_m \left( \frac{1}{\operatorname{tg} i'_m} - \frac{1}{\operatorname{tg} u'_m} \right) \operatorname{tg} i'_m \frac{di_m}{\operatorname{tg} i_m} \quad (926)$$

или, пользуясь формулой (925),

$$\begin{aligned} dq'_m &= -q'_m \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} i'_m}{\operatorname{tg} u'_m} \right) \frac{h}{\operatorname{tg} i_m} \sum \frac{\varphi_0}{\cos i} = \\ &= q'_m \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} i'_m}{\operatorname{tg} u'_m} \right) r_m \cos i_m \sum \varphi_s. \end{aligned} \quad (927)$$

Переходя в область нулевых лучей (к малым углам  $i$ ), получаем:

$$dq'_0 = q'_m \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} i'_m}{\operatorname{tg} u'_m} \right) r_m \cos i_m \sum \varphi_0. \quad (928)$$

Из формул (927) и (928) находим выражение для изменения сферической аберрации в рассматриваемом частном случае:

$$d\Delta s' = q'_m \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} i'_m}{\operatorname{tg} u'_m} \right) r_m \cos i_m \sum \left( 1 - \frac{1}{\cos i} \right) \varphi_0. \quad (929)$$

В качестве примера рассмотрим введение поверхности склейки в плоско-выпуклой линзе, обращенной плоскостью к бесконечно удаленному предмету, со следующими данными:

$$\begin{aligned} r_1 &= \infty & d &= 20,0 & n &= 1,6128 & f'_0 = s'_0 &= 100,000 \\ r_2 &= -61,28 \end{aligned}$$

В линзу вводятся, как уже говорилось, два радиуса:  $r_2 = +30,0$  и  $r_3 = -61,28$  при разности показателей  $-0,0965$  для первой поверхности склейки и  $+0,0965$  для второй поверхности.

Можно представить, что вторая, «фиктивная», поверхность склейки по сути дела эквивалентна изменению разности показателей на последней поверхности линзы, возникающему вследствие введения первой склейки.

Задаваясь высотой апертурного луча, равной 10,0 мм, можно, пользуясь формулой (929), вычислить изменение сферической аберрации, ожидаемое после введения склейки. Находим

$$d\Delta s' = +6,79.$$

Для проверки можно проделать тригонометрический расчет хода луча до и после введения склейки. Получаем следующее значение истинного изменения сферической аберрации:

$$\Delta s' - \Delta s'_0 = 5,10.$$

Из сопоставления указанных величин видно, что, несмотря на не очень благоприятные условия (существенное изменение фокусного расстояния линзы после введения в нее склеек) для применения формулы (929), все же получается вполне удовлетворительное совпадение приближенного и точного значений изменения сферической аберрации.

Необходимо отметить следующее. Активное воздействие склеенной поверхности требует наличия на склейке больших углов падения и преломления  $i$  и  $i'$ . Поэтому работа склеенной поверхности всегда происходит сравнительно близко к граничному случаю преломления, когда действие преломляющей поверхности проявляется сильнее, нежели это предусматривается теорией аберраций третьего порядка.

Таким образом, создавая на склеенной поверхности сферическую аберрацию, необходимую для уничтожения сферической аберрации исходной линзы на краю ее отверстия, мы должны получить на меньших высотах сферическую аберрацию склеенной поверхности, меньшую по абсолютной величине, нежели сферическая аберрация исходной линзы. Вследствие этого при исправлении сферической аберрации склеенной линзы на краю отверстия наблюдается неполное исправление сферической аберрации на зонах.

Как уже было сказано, характер изменения астигматизма при изменении положения зрачка связан с величиной сферической аберрации в наклонных пучках, поэтому возвратимся к рассмотрению астигматизма склеенной линзы, в частности, плоско-выпуклой линзы с нормальной склейкой, имеющей обратную ориентировку по отношению к входному зрачку. Из фиг. 143 следует, что углы  $i$  и  $i'$  на склеенной поверхности для главного луча быстро возрастают по мере удаления входного зрачка и убывают при приближении зрачка к нашей линзе. Склейка особенно активно влияет на астигматизм в области дальнего положения входного зрачка, приводя к возникновению большого положительного астигматизма, рост которого может превзойти рост отрицательного астигматизма основной плоско-выпуклой линзы, происходящий также с удалением входного зрачка.

Вследствие этого левая ветвь кривых изменения астигматизма будет лежать в области положительных значений астигматизма, в силу чего мы потеряем дальнейшее положение входного зрачка, дающее

исправление астигматизма, и сохранится лишь одно ближнее положение анастигматического зрачка. Такая картина может быть получена и по теории aberrаций третьего порядка (исправление астигматизма тонкой линзы, корригированной на сферическую aberrацию).

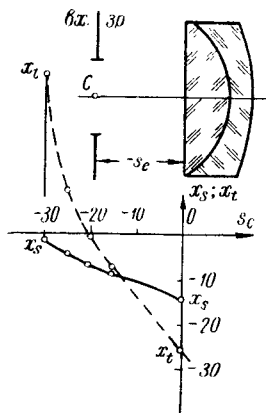
Однако на самом деле мы наблюдаем значительно более сложную картину.

Плавно изменяя разность показателей преломления на нашей склеенной поверхности, можно подобрать такое ее значение, когда вблизи основного максимума астигматических кривых еще будет сохраняться картина, соответствующая случаю простой плоско-выпуклой линзы;

$$\begin{aligned} r_1 &= \infty \\ r_2 &= -20,03 \quad \alpha_1 = 10,0 \quad 1,5480 \\ r_3 &= -46,73 \quad \alpha_2 = 5,0 \quad 1,6126 \end{aligned}$$

можно даже добиться сохранения обоих положений зрачков, обеспечивающих исправление астигматизма.

Вместе с тем, по мере удаления входного зрачка действие склеенной поверхности усиливается и можно найти такую область положений входных зрачков, где



$s_c$	$x_t$	$x_s$
0	- 25,65	- 14,86
- 15	- 7,16	- 8,26
- 20	- 0,85	- 6,46
- 25	9,07	- 4,38
- 30	34,59	- 1,15

Фиг. 143. Исчезновение дальнего положения входного зрачка, дающего исправление астигматизма, при введении в плоско-выпуклую линзу нормальной склейки для исправления сферической aberrации.

наблюдаются положительные значения астигматизма; совершенно очевидно также, что мы сможем отыскать и такое положение входного зрачка, когда он в третий раз обеспечит исправление астигматизма. Подобная картина представлена на фиг. 144.

При рассмотрении кривых изменения астигматизма, представленных на фигуре, обнаруживаются следующие явления.

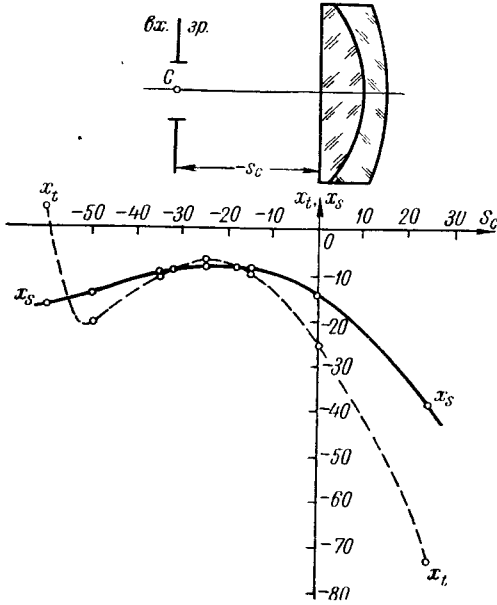
1. На меридиональной кривой слева от точки максимума находится точка перегиба кривой; так как в этой точке радиус кривизны обращается в бесконечность, то в ней наблюдается отсутствие меридиональной сферической aberrации в наклонном пучке (при реальном угле наклона пучка к оси системы).

2. Левее точки перегиба на меридиональной кривой имеется точка минимума; усиливая разность показателей на склеенной поверхности, будем сближать все три точки (точку максимума, точку перегиба и точку минимума); в момент совпадения этих трех точек касательная к кривой в такой тройной точке станет параллельной оси системы —

будет наблюдаться одновременное равенство нулю как сферической аберрации, так и комы.

3. Варьируя величину прогиба исходной менисковой линзы, можно поднимать или опускать сагиттальную кривую относительно меридио-

$$\begin{aligned} r_1 &= \infty \\ r_2 &= -30,82 & d_1 &= 10,0 & 1,5480 \\ r_3 &= -50,97 & d_2 &= 5,0 & 1,6126 \end{aligned}$$



$s_c$	$x_t$	$x_s$
25	-72,76	-38,19
0	-25,62	-14,67
-15	-10,68	-9,21
-18	-8,80	-8,60
-25	-7,42	-8,15
-30,2	-8,30	-8,47
-35	-10,36	-9,24
-50	-21,09	-14,16
-60	4,55	-17,17

Фиг. 144. Возникновение третьего положения входного зрачка, дающего исправление астигматизма при введении в плоско-выпуклую линзу нормальной склейки

нальной, соответственным образом влияя на перемещение точек пересечения обеих кривых; в частности, представляется принципиально возможным добиться нахождения точки пересечения сагиттальной

и меридиональной кривых вблизи рассмотренных нами трех характерных точек меридиональной кривой и таким образом достигнуть одновременного исправления в наклонном пучке сферической аберрации, комы и астигматизма, что, согласно теории аберраций третьего порядка, принципиально невозможно для тонкой линзы.

4. На меньшем угле поля зрения наблюдается расхождение минимума и максимума на меридиональной кривой; поэтому здесь при уже выбранном положении входного зрачка влияние склейки на астигматические кривые ослабляется и сходит на нет; наблюдается выпуклость меридиональной кривой, определяющая отрицательный знак сферической аберрации; это позволяет сделать вывод о том, что склейка быстрее исправляет сферическую аберрацию в наклонном пучке, нежели на оси системы.

Таким образом, при наличии склеенной поверхности наблюдается переход сферической аберрации через нуль при соответственном росте полевого угла.

Точно так же мы приходим к заключению, что и кома при наличии склеенной поверхности в некоторой точке поля изменит знак на обратный; такой же вывод может быть сделан и в отношении астигматизма.

В рассмотренном случае мы наблюдали возникновение дополнительного, третьего, входного зрачка, дающего исправление астигматизма; в случае обратной ориентировки нормальной склеенной поверхности этот дополнительный зрачок оказался расположенным левее дальнего основного зрачка; можно было бы показать, что при прямой ориентировке нормальной склейки такой дополнительный зрачок оказался бы расположенным правее ближнего основного зрачка.

При более детальном изучении влияния положения зрачка на исправление астигматизма мы могли бы обнаружить тенденцию к существованию еще одного дополнительного, четвертого, зрачка, а иногда и само существование четвертого зрачка, при котором будет наблюдаться исправление астигматизма.

В качестве иллюстрации факта существования двух дополнительных зрачков можно привести случай концентричной линзы (фиг. 145), у которой оба основных зрачка совпадают и оба дополнительных зрачка располагаются симметрично относительно двоянного основного.

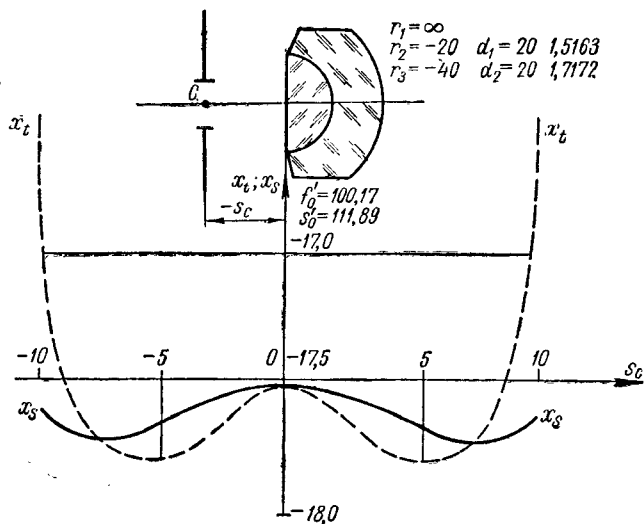
Все эти выводы нельзя получить на основе теории аберраций третьего порядка; тем не менее, эти выводы могут быть полезны даже в таких простейших случаях, как например, при расчете простой ландшафтной линзы, в частности, при решении задачи существенного уменьшения комы на краю поля зрения.

Перейдем теперь к рассмотрению работы так называемых двойных склеенных анастигматов, которые особенно интересны тем, что в каждой их половине встречается по две склеенные поверхности.

Для всех основных типов двойных склеенных анастигматов является весьма характерным, что они при одинаковых оптических характеристиках (поле зрения, относительное отверстие, фокусное расстояние) имеют практически одинаковые качественные показатели и даже одинаковый характер остаточных аберраций (сферической аберрации и



астигматизма); кроме того, исключая из рассмотрения склеенные поверхности, можно видеть, что все эти объективы строятся на основе одного и того же положительного мениска с равными радиусами (что необходимо для исправления кривизны поля), работающего при ближнем положении зрачка.



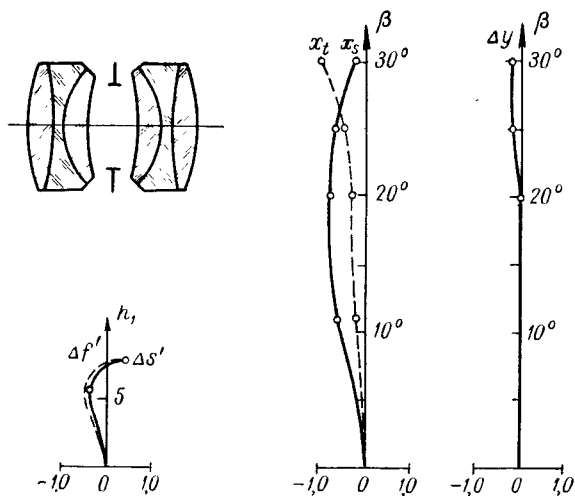
$s_c$	$x_t$	$x_s$	$h$	$\Delta s$	$\Delta f$
10	-16,35	-17,62	20	-507,57	-334,74
7,91	-17,71	-17,74	14	4,49	-203,3
4	-17,78	-17,62	7	-0,24	-0,16
0	-17,53	-17,53	4,5	-0,16	-0,10
-4	-17,78	-17,62			
-7,91	-17,71	-17,74			
-10	-16,46	-17,62			

Фиг. 145. Изменение астигматизма concentричной склеенной линзы в зависимости от положения зрачка.

Существование такого общего положения зрачка для всех двойных склеенных анастигматов позволяет утверждать, что введение склеенных поверхностей во всех конструкциях преследовало одни и те же цели — исправление отрицательных зон астигматизма и исправление сферической aberrации на краю отверстия.

Весьма существенно, что для решения этих двух задач необходимо иметь как аномальную, так и нормальную склейки; при этом обе склейки не должны противодействовать друг другу.

Перейдем теперь к рассмотрению группы основных конструкций двойных склеенных анастигматов и проследим на них работу склеенных поверхностей.



Фиг. 146. Объектив типа Дагор.

1. Объектив типа Дагор (фиг. 146). Приведем данные передней половинки Дагора:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= +21,33 & d_1 &= 3,0 & n_2 &= 1,61366 \\
 r_2 &= -35,56 & d_2 &= 0,9 & n_3 &= 1,54852 \\
 r_3 &= +8,60 & d_3 &= 2,5 & n_4 &= 1,51390 \\
 r_4 &= +21,46 & \frac{d_4}{2} &= 2,75.
 \end{aligned}$$

Вторая половинка объектива симметрична передней половинке. Рассматривая переднюю половинку объектива, прежде всего видим, что оба наружных радиуса практически равны друг другу (разность радиусов всего 0,13, или около 0,6%); второй радиус — 35,56 определяет аномальную поверхность склейки с обратной ориентировкой по отношению к зрачку; эта поверхность обеспечивает исправление отрицательных зон астигматизма.

Обратная ориентировка поверхности при наличии сравнительно большой разности показателей, равной 0,06514, приводит к довольно пологому радиусу кривизны, благодаря чему ее влияние на ход осевого пучка и сферическую aberrацию на оси становится незначительным.

Третий радиус +8,60 определяет поверхность нормальной склейки с прямой ориентировкой; прямая ориентировка обеспечивает незна-

чительное влияние этой поверхности на астигматизм. Однако эта поверхность благодаря малости радиуса кривизны (что было обусловлено меньшей разностью показателей, равной 0,03462) весьма активно влияет на высшие порядки сферической aberrации, что и позволяет достичь на краю отверстия исправления сферической aberrации.

2. Объектив типа двойной протар (фиг. 147). Конструктивные данные передней половинки этого объектива следующие:

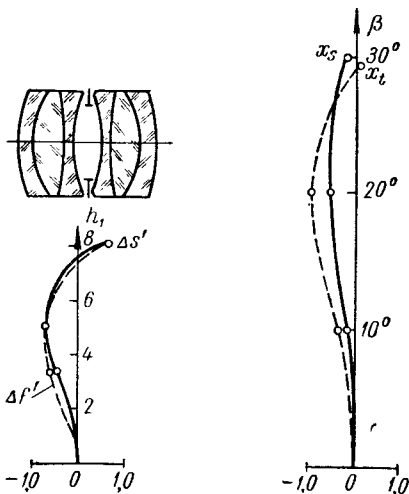
$$\begin{aligned}
 r_1 &= +20,83 & d_1 &= 1,10 & n_2 &= 1,6221 \\
 r_2 &= +9,15 & d_2 &= 3,64 & n_3 &= 1,5895 \\
 r_3 &= -30,31 & d_3 &= 1,06 & n_4 &= 1,4983 \\
 r_4 &= +19,04 & \frac{d_4}{2} &= 1,41
 \end{aligned}$$

Вторая половинка объектива также симметрична первой. Рассматривая эту конструкцию, мы также сталкиваемся с близостью друг к другу первого и последнего радиусов; однако на втором радиусе наблюдается нормальная склейка, имеющая прямую ориентировку, крутой радиус кривизны и сравнительно малую разность показателей преломления — совершенно аналогично третьей поверхности в Дагоре; наоборот, третья поверхность в половинке двойного протара является аномальной склейкой с несколько большей чем в Дагоре разностью показателей преломления и с обратной ориентировкой. Радиус кривизны этой поверхности в двойном протаре близок к радиусу второй поверхности у Дагора.

Таким образом, конструкция двойного протара отличается от конструкции Дагора лишь перестановкой поверхностей обеих склеек; так как при такой перестановке аномальная склейка переносится ближе к диафрагме, то ее влияние на исправление зоны астигматизма должно несколько ослабеть, что и наблюдается на самом деле.

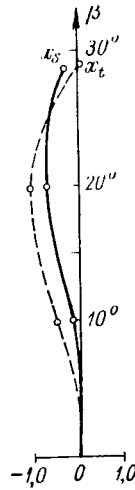
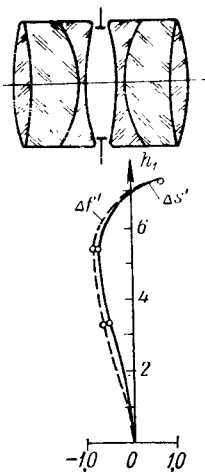
3. Объектив типа Коллинеар (фиг. 148). Передняя половинка Коллинеара имеет следующие данные:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= +27,10 & d_1 &= 1,97 & n_2 &= 1,6129 \\
 r_2 &= -33,59 & d_2 &= 5,12 & n_3 &= 1,5152 \\
 r_3 &= -12,43 & d_3 &= 0,59 & n_4 &= 1,5434 \\
 r_4 &= +26,99 & \frac{d_4}{2} &= 1,82
 \end{aligned}$$



Фиг. 147. Объектив типа двойной протар.

Наружные радиусы в половинке Коллинеара также весьма близки; обе склейки в отличие от обоих предыдущих объективов имеют одну и ту же — обратную — ориентировку; вторая поверхность представляет собой аномальную склейку, сходную по своим свойствам (относительно большой разности показателей и сравнительно пологому радиусу кривизны) с аналогичными поверхностями в предшествовавших объективах; третья же поверхность — нормальная склейка — отличается от нормальных склеек в Дагоре и двойном протаре обратной ориентировкой.



Фиг. 148. Объектив типа Коллинеар.

Можно было бы ожидать, что наличие такой поверхности в Коллинеаре будет противодействовать работе аномальной склейки; однако благодаря малой разности показателей, значительно более крутому радиусу и более близкому расположению относительно диафрагмы влиянию нормальной склейки на исправление зон астигматизма будет существенно ослаблено, и, таким образом, эта поверхность не будет мешать работе аномальной склейки.

Можно было бы ожидать, что наличие такой поверхности в Коллинеаре будет противодействовать работе аномальной склейки; однако благодаря малой разности показателей, значительно более крутому радиусу и более близкому расположению относительно диафрагмы влиянию нормальной склейки на исправление зон астигматизма будет существенно ослаблено, и, таким образом, эта поверхность не будет мешать работе аномальной склейки.

## Глава XVIII

### НЕСКЛЕЕННЫЕ СИСТЕМЫ

#### § 65. Исправление кривизны поля с помощью concentричной линзы. Объективы типа Плазмат

Рассматривая работу мениска, мы до сих пор затрагивали вопросы, связанные с исправлением астигматизма, комы, сферической aberrации, но не касались вопроса исправления кривизны поля зрения, если не считать упоминания о том, что в двойных склеенных анастигматах исправление кривизны поля достигалось за счет равенства радиусов поверхностей наружных линз.

У мениска с неодинаковыми наружными радиусами наблюдается некоторая кривизна поля зрения. В этом случае кривизна поля может быть исправлена без нарушения астигматизма добавлением к мениску

отрицательной концентричной линзы, обе поверхности которой располагаются концентрично выходному зрачку мениска.

Обратимся к чертежу (фиг. 149), на котором представлена концентричная линза; в ее центре расположен выходной зрачок мениска, обеспечивающий исправление астигматизма.

Расстояние от выходного зрачка до заднего фокуса мениска и от того же зрачка до заднего фокуса мениска совместно с концентричной линзой обозначим  $s_0$  и  $s'_0$ ; расстояния вдоль главного луча от выходного зрачка до совмещенных друг с другом меридиональных и сагиттальных фокусов до введения и после введения концентричной линзы обозначим соответственно  $s$  и  $s'$ .

Так как по условию центр концентричной линзы был совмещен с выходным зрачком мениска, то концентричная линза не сможет внести астигматизма. Концентричную линзу можно рассматривать как систему, оптическая сила которой как вдоль оси, так и вдоль главного луча сохраняется неизменной.

Поэтому можно записать

$$\varphi_0 = \frac{1}{s'_0} - \frac{1}{s_0}; \quad \varphi = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \varphi_0. \quad (930)$$

Для обеспечения исправления кривизны поля необходимо, чтобы

$$s' \cos \beta = s'_0. \quad (931)$$

Поэтому, умножая вторую из формул (930) на  $1 : \cos \beta$  и учитывая (931), получаем:

$$\frac{1}{s'_0} - \frac{1}{s \cos \beta} = \frac{\varphi_0}{\cos \beta}, \quad (932)$$

откуда

$$\frac{1}{s_0} - \frac{1}{s \cos \beta} = \varphi_0 \left( \frac{1}{\cos \beta} - 1 \right). \quad (933)$$

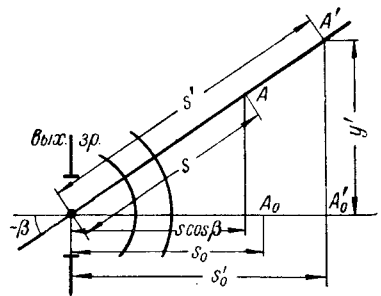
Так как величины  $s_0$  и  $s$  после мениска должны быть известны, то из формулы (933) можно определить силу концентричной линзы  $\varphi_0$ . Находим:

$$\varphi_0 = \frac{\frac{\cos \beta}{s_0} - \frac{1}{s}}{1 - \cos \beta}. \quad (934)$$

В частном случае, если  $s_0 = s$  (поверхность изображения после первой линзы концентрична зрачку), из формулы (934) находим:

$$\varphi_0 = - \frac{1}{s_0}. \quad (935)$$

В этом случае изображение после первой линзы располагается в фокальной поверхности концентричной линзы и плоское изображение после концентричной линзы уходит в бесконечность.



Фиг. 149. Линза, концентричная выходному зрачку.

Рассматривая работу плоско-выпуклой линзы, мы видели, что в этом случае наблюдается концентричность поверхности изображения центру выходного зрачка; отсюда можно сделать вывод, что концентричная отрицательная линза не может быть использована для исправления кривизны поля в этом случае.

Переходя же к линзам менискообразной формы, мы всегда будем иметь дело с отрезками  $s$  большими, нежели  $s_0$ ; поэтому для линз менискообразной формы принципиально всегда можно найти определенное значение силы концентричной линзы, обеспечивающей исправление кривизны поля.

Выходной зрачок мениска при дальнем положении входного зрачка располагается дальше от последней поверхности мениска, чем при его ближнем положении; поэтому значительно труднее осуществить отрицательную концентричную линзу нужной силы для дальнего положения входного зрачка мениска (радиусы кривизны могут получиться меньшими, нежели отрезок до выходного зрачка), чем для ближнего положения; поэтому, практически концентричная отрицательная линза располагается после мениска, когда он работает при ближнем положении входного зрачка.

Дадим формулу для определения оптической силы концентричной линзы. Из формулы (693) для силы толстой линзы в воздухе

$$\varphi = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{d}{n} \cdot \frac{(n - 1)^2}{r_1 r_2} \quad (936)$$

можно вынести за скобку общий множитель  $(n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$ .

Тогда

$$\varphi = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \left[ 1 + \frac{(n - 1) d}{n(r_2 - r_1)} \right]. \quad (937)$$

Для концентричной линзы должно соблюдаться условие:

$$k = r_2 - r_1 + d = 0; \quad (938)$$

пользуясь формулами (937) и (938), получаем окончательное выражение для силы концентричной линзы:

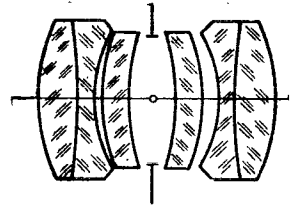
$$\varphi = \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (939)$$

Формула (939) позволяет при известной величине силы концентричной линзы и заданной величине одного из ее радиусов находить значение второго радиуса.

В качестве примера применения концентричных линз для исправления кривизны поля приводим данные объектива Ортометар (типа Плазмат):

$r_1 = 25,6$	$d_1 = 5,0$	$n_2 = 1,611$	$f'_0 = 101,4828;$	$s'_0 = 87,9536$
$r_2 = -94,9$	$d_2 = 2,4$	$n_3 = 1,540$	$d_1 + d_2 = 7,4$	
$r_3 = +18,2$	$d_3 = 0,8$	$n_4 = 1$	$r_1 - r_3 = 7,4$	

$r_4 = 23,5$	$d_4 = 3,4$	$n_5 = 1,561$	
$r_5 = 35,1$	$d_5 = 6,0$	$n_6 = 1$	$d_8 + d_9 = 7,5$
$r_6 = -32,0$	$d_6 = 3,7$	$n_7 = 1,561$	$r_{10} - r_8 = 7,1$
$r_7 = -22,5$	$d_7 = 1,5$	$n_8 = 1$	
$r_8 = -17,9$	$d_8 = 2,0$	$n_9 = 1,540$	
$r_9 = +76,6$	$d_9 = 5,5$	$n_{10} = 1,611$	
$r_{10} = -25,0$			

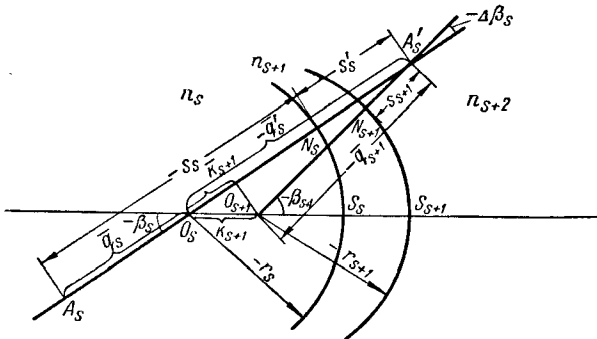


Фиг. 150. Объектив типа Плазмат.

Схема объектива приведена на фиг. 150.

**§ 66. Условие для исправления кривизны поля зрения у систем, в которых главный луч имеет малые углы падения и преломления на преломляющих поверхностях**

В практике создания широкоугольных оптических систем нередко встречаются конструкции, в которых главный луч не имеет больших углов преломления на поверхностях систем; к таким системам относятся, например, объективы гауссова типа, построенные на сочетании



Фиг. 151. Ход луча через близкие к концентричности поверхности при малых углах падения и преломления.

положительных и отрицательных менисков, имеющих прямую ориентировку по отношению к диафрагме.

Рассматривая этот случай, можно получить приближенное условие, соблюдение которого необходимо (но недостаточно!) для исправления кривизны поля в оптических системах с полем зрения конечных размеров.

Обратимся к чертежу (фиг. 151), на котором представлен ход главного луча через две преломляющие поверхности в случае, когда на обеих поверхностях главный луч имеет малые углы падения и преломления.

Пользуясь известной формулой, связывающей угол луча с осью системы —  $\beta$ , расстояние между центром поверхности и точкой

пересечения луча с осью  $q$ , радиус кривизны поверхности  $r$  и угол падения  $i$ , можно написать:

$$q \sin \beta = r \sin i. \quad (940)$$

Исходя из предположения, что угол  $i$  мал, мы можем из формулы (940) установить и малость величины  $q$ .

Согласно закону преломления

$$n \sin i = n' \sin i' \quad (941)$$

малость угла  $i$  приводит к малости угла  $i'$ .

Малость обоих углов  $i$  и  $i'$  обуславливает конечность угла  $\beta'$ ; согласно формуле (662) можем написать:

$$nq \sin \beta = n'q' \sin \beta',$$

$$\beta' = \beta - i + i', \quad (942)$$

где

отсюда вытекает малость отрезка  $q'$  после преломления главного луча.

Переходя к следующей преломляющей поверхности, необходимо для обеспечения малости угла падения  $i_{s+1}$ , обеспечить малость отрезка  $q_{s+1}$ .

Имея в виду, что разность отрезков  $q_{s+1}$  и  $q'_s$  равна расстоянию между центрами данной и последующей поверхностей

$$q_{s+1} - q'_s = k_{s+1}, \quad (943)$$

приходим к заключению, что отрезки  $k_{s+1}$  также будут малыми.

При переходе от одной поверхности системы к другой наблюдаются малые отклонения главного луча от его первоначального направления; это позволяет принять главный луч как некоторую новую ось, относительно которой система может рассматриваться как система с нарушенной центрировкой; при этом, ввиду малости величины  $q$ , можно считать нарушения центрировки малыми.

Напишем выражения для астигматических инвариантов в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{n' \cos^2 i'}{t'} - \frac{n' \cos i'}{r} &= \frac{n \cos^2 i}{t} - \frac{n \cos i}{r} \\ \frac{n'}{s'} - \frac{n' \cos i'}{r} &= \frac{n}{s} - \frac{n \cos i}{r} \end{aligned} \right\} \quad (944)$$

Так как оба эти выражения отличаются друг от друга множителями при первых слагаемых левой и правой частей в виде косинусов углов падения и преломления  $i$  и  $i'$ , можно, не делая ошибки второго порядка малости, пренебречь разницей между этими выражениями и заменить их выражением инварианта Аббе для нулевых лучей (применяя его вдоль главного луча).

Переходя к новой оси, нужно заменить величины  $k$  их проекциями на новую ось:

$$\bar{k} = k \cos \beta. \quad (945)$$

Преобразуем инвариант Аббе, подставляя вместо  $s$  и  $s'$  их значения из формул

$$\left. \begin{aligned} q &= r - s \\ q' &= r - s' \end{aligned} \right\} \quad (946)$$



Находим

$$\frac{n'q'}{r(r-q')} = \frac{nq}{r(r-q)}. \quad (947)$$

Переходя к обратным величинам и деля обе части равенства на  $r^2$ , получаем

$$\left(\frac{1}{q'} - \frac{1}{r}\right) \frac{1}{n'} = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right) \frac{1}{n} \quad (948)$$

или

$$\frac{1}{n'q'} - \frac{1}{nq} = \left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{r} = \frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)}{r}, \quad (949)$$

где величина  $\Delta\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n'} - \frac{1}{n}$ .

Заметим, что формула (949) для нулевых лучей не предусматривает никаких ограничений для величин  $q$ .

Вдоль главного луча как новой оси мы будем иметь свои величины  $\bar{q}$ ; для этих отрезков также должно соблюдаться равенство

$$\frac{1}{n'\bar{q}'} - \frac{1}{n\bar{q}} = \frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)}{r}. \quad (950)$$

Проследим переход от величин  $\bar{q}'_s$  после данной поверхности к величинам  $\bar{q}_{s+1}$  перед последующей поверхностью; из формул (945) и (943) напишем

$$\frac{1}{n_{s+1}(\bar{q}_{s+1} - \bar{k}_{s+1})} - \frac{1}{n_s \bar{q}_s} = \frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)_s}{r_s}. \quad (951)$$

Так как  $\bar{k}_{s+1}$  есть величина малая, можно преобразовать формулу (951):

$$\frac{1}{n_{s+1}\bar{q}_{s+1}} - \frac{1}{n_s \bar{q}_s} = \frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)_s}{r_s} - \left[\frac{1}{n_s \bar{q}_s} + \frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)_s}{r_s}\right]^2 n_{s+1} \bar{k}_{s+1} \quad (952)$$

или, переходя к величинам  $k_{s+1}$  на оси системы,

$$\frac{1}{n_{s+1}\bar{q}_{s+1}} - \frac{1}{n_s \bar{q}_s} = \frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)_s}{r_s} - \left[\frac{1}{n_s \bar{q}_s} + \frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)_s}{r_s}\right]^2 n_{s+1} k_{s+1} \cos \beta. \quad (953)$$

Суммируя выражения (953) для  $m-1$  поверхностей системы, находим

$$\frac{1}{n_m \bar{q}_m} - \frac{1}{n_1 \bar{q}_1} = \sum_1^{m-1} \frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)_s}{r_s} - \sum_1^{m-1} \left[\frac{1}{n_s \bar{q}_s} + \frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)_s}{r_s}\right]^2 n_{s+1} k_{s+1} \cos \beta. \quad (954)$$

Прибавляя к полученному выражению величину

$$\frac{1}{n_{m+1}\bar{q}'_m} = \frac{1}{n_m\bar{q}_m} + \frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)_m}{r_m}, \quad (955)$$

получаем

$$\frac{1}{n_{m+1}\bar{q}'_m} = \frac{1}{n_1\bar{q}_1} + \sum_1^m \frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)_s}{r_s} - \sum_1^{m-1} n_{s+1} \left[ \frac{1}{n_s\bar{q}_s} + \frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)_s}{r_s} \right]^2 k_{s+1} \cos \beta \quad (956)$$

или

$$\frac{1}{n_{m+1}\bar{q}'_m} = \frac{1}{n_1\bar{q}_1} + \sum_1^m \frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)_s}{r_s} - \sum_1^{m-1} n_{s+1} \left[ \frac{1}{n_1\bar{q}_1} + \sum_1^s \frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)_i}{r_i} \right]^2 k_{s+1} \cos \beta. \quad (957)$$

Если предмет расположен в бесконечности, то отрезки  $\bar{q}_1$  вдоль главного луча и  $q_1$  вдоль оси системы равны бесконечности; в этом случае формула (957) несколько упрощается:

$$\frac{1}{n_{m+1}\bar{q}'_m} = \sum_1^m \frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)_s}{r_s} - \cos \beta \sum_1^{m-1} \left[ \sum_1^s \frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)_i}{r_i} \right]^2 n_{s+1} k_{s+1}. \quad (958)$$

Переходя к осевому пучку, нетрудно написать аналогичное выражение, заменяя в формуле (958) величины  $\bar{q}$  величинами  $q$  и величину косинуса угла  $\beta$  единицей. Находим

$$\frac{1}{n_{m+1}q'_m} = \sum_1^m \frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)_s}{r_s} - \sum_1^{m-1} \left[ \sum_1^s \frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)_i}{r_i} \right]^2 n_{s+1} k_{s+1}. \quad (959)$$

Если необходимо получить поле зрения плоским, то мы должны соблюсти равенство

$$\bar{q}'_m \cos \beta = q'_m. \quad (960)$$

Поэтому, деля формулу (958) на величину  $\cos \beta$  и вычитая затем выражение (959), нужно получить в левой части величину, равную нулю; таким образом, мы приходим к необходимости соблюдения следующего условия

$$(1 - \cos \beta) \sum_1^m \frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)_s}{r_s} = 0. \quad (961)$$

Соблюдение условия (961) возможно лишь при условии

$$\sum_1^m \frac{\Delta \left( \frac{1}{n} \right)_s}{r_s} = 0, \quad (962)$$

хорошо известном в теории аберраций третьего порядка под названием условия Пецваля.

Напомним, что равенство нулю пецвалево́й суммы гарантирует отсутствие кривизны поля только в области аберраций третьего порядка; в рассматриваемом же случае приравнивание нулю пецвалево́й суммы необходимо для устранения кривизны для большого поля зрения при малых углах  $i$  и  $i'$ , однако необходимо заметить, что введение условия малости углов  $i$  и  $i'$  говорит о том, что само по себе условие Пецваля является недостаточным для уничтожения кривизны на большом поле зрения. В качестве примера приведем значение пецвалево́й суммы для объектива Гипергон, обладающего полем зрения в  $130^\circ$ ,

у которого 
$$\sum \frac{\Delta \left( \frac{1}{n} \right)}{r} = 0,0005.$$

### § 67. Фотообъектив типа триплет

Основные свойства объективов типа триплет могут быть также выяснены путем изучения свойств простой линзы.

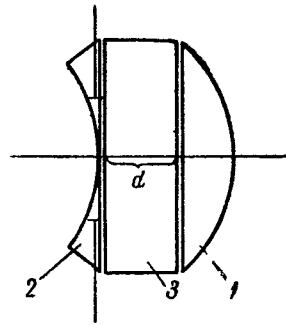
При наблюдении за работой мениска с близко расположенным входным зрачком видно, что, начиная с некоторого момента, ближнее положение входного зрачка практически совпадает с первой поверхностью мениска.

При наличии достаточно большой толщины мениска можно представить себе, что такой мениск составлен из трех элементов: плоско-выпуклой линзы 1, плоско-вогнутой линзы 2 и плоскопараллельной пластинки 3 между ними (фиг. 152).

Все эти три элемента первоначально сложены вплотную, по плоским соприкасающимся поверхностям.

Далее, как известно, можно осуществить «редуцирование» плоско-параллельной пластинки (или приведение ее к воздуху); при средних полях зрения такое редуцирование существенным образом не изменит аберраций системы (следует также иметь в виду, что сама толщина  $d$  редуцируемой пластинки не очень велика).

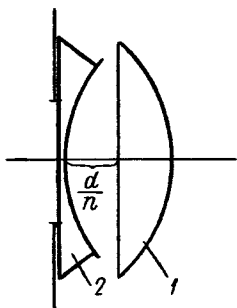
Таким образом, мы приходим к системе двух линз 2 и 1, отделенных друг от друга воздушным промежутком. При этом первая из этих двух линз тонкая и практически совпадает с входным зрачком всей системы.



Фиг. 152. Образование половинки триплета на основе толстого мениска.

В главе III [формулы (97) и (98)] было показано, что астигматизм тонкой линзы, совпадающей со зрачком, определяется оптической силой линзы и величиной полевого угла и не зависит от формы линзы. Поэтому можно перевернуть первую отрицательную линзу 2 системы, обратив ее плоской стороной к предмету; необходимо подчеркнуть, что при таком переворачивании исправление астигматизма останется неизменным и соответствующим астигматизму мениска с ближним положением входного зрачка (фиг. 153).

Составляя из двух таких половинок симметричную систему, мы можем обе отрицательные линзы, соприкасающиеся друг с другом своими плоскими поверхностями, объединить в одну, получив таким образом симметричную трехлинзовую систему — исходную систему для объективов типа триплет.



Фиг. 153. Половинка триплета из плоско-вогнутой и плоско-выпуклой линз.

Перейдем теперь к рассмотрению других свойств половинки триплета. Возвращаясь к линзе менискообразной формы, нужно помнить, что одна простая линза не может быть исправлена на сферическую aberrацию для осевой точки; вместе с тем первая поверхность — вогнутая — обладает некоторой положительной сферической aberrацией.

Однако после разделения мениска на две линзы (но до переворачивания первой линзы!) первая линза — отрицательная — получила форму, близкую к форме линзы минимальной сферической aberrации; этим и объясняется, что положительная сферическая aberrация первой линзы не могла компенсировать отрицательную сферическую aberrацию второй линзы.

После переворачивания первая линза значительно отойдет от формы линзы минимальной aberrации, и поэтому ее сферическая aberrация возрастет в несколько раз и окажется близкой по своей абсолютной величине к сферической aberrации второй линзы; таким образом, суммарная сферическая aberrация половинки триплета окажется значительно меньше, нежели сферическая aberrация исходного мениска, если вообще не окажется исправленной или даже положительной.

Ранее было установлено, что для мениска, работающего при ближнем положении входного зрачка, изменение сферической aberrации по полю зрения связано с быстрым ее ростом; возвращаясь к половинке триплета, мы видим, что ее первый компонент — отрицательная линза, совпадающая с входным зрачком, должна обладать быстрым ростом по полю зрения положительной сферической aberrации, которая при суммировании с растущей отрицательной сферической aberrацией второй, положительной, линзы будет в значительной степени ослаблять ее рост.

Перейдем к рассмотрению некоторых деталей. В случае несколько углубленного в линзу входного зрачка мы будем вынуждены, перенося положение зрачка на первую поверхность нашей линзы, отойти

от точного исправления астигматизма в сторону его положительных значений; такая картина, очевидно, должна будет сохраниться и после переворачивания первой линзы.

Для исправления такого положительного астигматизма в половинке триплета можно отказаться от сохранения плоскости в положительных линзах и сделать плоские поверхности слегка выпуклыми, что будет способствовать росту сферической аберрации в сторону положительных значений.

В случае же, когда входной зрачок будет располагаться перед первой поверхностью мениска и когда при его переносе на первую поверхность линзы придется иметь дело с отрицательным астигматизмом, можно, не изменяя сферической аберрации, исправить астигматизм, увеличивая толщину средней линзы, так как половинка триплета сохранит кому того же знака, что и исходная менисковая линза.

Уменьшение показателя преломления в отрицательной линзе половинки триплета приводит к росту положительной сферической аберрации.

Небезынтересно отметить, что придание выпуклости плоским поверхностям положительных линз, аналогично работе аномальной склейки с обратной ориентировкой, приводит к росту положительных зон астигматизма. Кроме того, переход к выпуклым поверхностям в положительных линзах усиливает величину нарушения условия синусов для центра выходного зрачка и тем самым способствует росту положительного аберрационного виньетирования.

Все эти особенности работы половинки триплета нетрудно проследить на приводимых ниже численных примерах:

1. Мениск с положительным астигматизмом (фиг. 154):

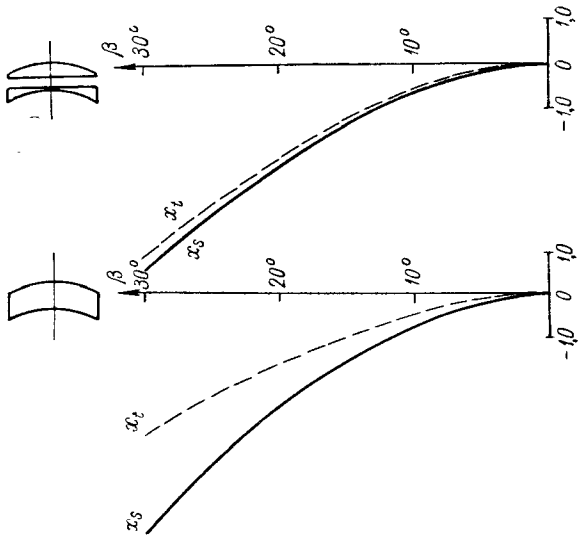
$$\begin{array}{l} r_1 = -25 \\ r_2 = -20 \end{array} \quad \begin{array}{l} d_1 = 6 \\ d_2 = 2,3 \\ d_3 = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} n_2 = 1,6126 \\ n_3 = 1 \\ n_4 = 1,6126 \end{array} \quad \begin{array}{l} f'_0 = 112,124 \\ f'_0 = 108,1235 \\ f'_0 = 74,556 \end{array} \quad \begin{array}{l} s'_0 = 122,347 \\ s'_0 = 119,146 \\ s'_0 = 52,163 \end{array}$$

2. Половинка триплета с плоско-выпуклой положительной линзой (фиг. 155):

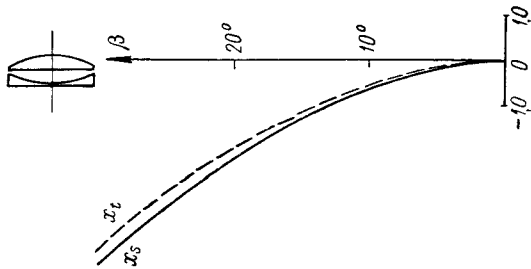
$$\begin{array}{l} r_1 = \infty \\ r_2 = 25 \\ r_3 = \infty \\ r_4 = -20 \end{array} \quad \begin{array}{l} d_1 = 0 \\ d_2 = 2,3 \\ d_3 = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} n_2 = 1,6126 \\ n_3 = 1 \\ n_4 = 1,6126 \end{array} \quad \begin{array}{l} f'_0 = 108,1235 \\ f'_0 = 74,556 \\ f'_0 = 74,556 \end{array} \quad \begin{array}{l} s'_0 = 119,146 \\ s'_0 = 119,146 \\ s'_0 = 52,163 \end{array}$$

3. Половинка триплета с двояковыпуклой положительной линзой (фиг. 156)

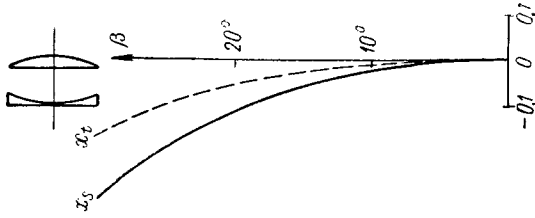
$$\begin{array}{l} r_1 = \infty \\ r_2 = 25 \\ r_3 = 249,3 \\ r_4 = -21,65 \end{array} \quad \begin{array}{l} d_1 = 0 \\ d_2 = 8 \\ d_3 = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} n_2 = 1,6126 \\ n_3 = 1 \\ n_4 = 1,6126 \end{array} \quad \begin{array}{l} f'_0 = 74,556 \\ f'_0 = 74,556 \\ f'_0 = 74,556 \end{array} \quad \begin{array}{l} s'_0 = 52,163 \\ s'_0 = 52,163 \\ s'_0 = 52,163 \end{array}$$



Фиг. 154. Астигматизм исходного мениска и полученной из него половинки триплета с неперевернутой отрицательной линзой.



Фиг. 155. Астигматизм половинки триплета с перевернутой отрицательной линзой.



Фиг. 156. Половинка триплета с двойковой линзой.

## § 68. Работа концентричной воздушной прослойки

Наряду с такими коррекционными элементами оптической системы, как например, прогиб линзы или введение поверхностей склейки, мы нередко встречаемся с тонким воздушным промежутком, разделяющим две линзы или две близко расположенные поверхности системы.

Такой коррекционный элемент может быть с успехом получен путем расклейки двух склеенных друг с другом поверхностей системы с последующей их раздвижкой на некоторый малый воздушный промежуток.

Особенностью полученного таким образом коррекционного элемента является равенство радиусов обеих его поверхностей при неравенстве показателей преломления для первой и последней среды в общем случае (хотя в частном случае равенство показателей первой и последней среды вполне возможно).

Это равенство радиусов всегда можно несколько нарушить; при этом мы, очевидно, придем к наиболее общему случаю тонкой воздушной прослойки, которую можно охарактеризовать как систему из двух поверхностей с мало отличающимися радиусами, малой толщиной по оси системы и малой разностью показателей преломления первой и последней сред, но с большими разностями показателей преломления по обе стороны каждой из обеих преломляющих поверхностей рассматриваемого коррекционного элемента.

Можно показать, что данное нами определение охватывает собой не только тонкие воздушные прослойки между линзами, но под него могут быть подведены тонкие линзы менискообразной формы (например, тонкие концентричные линзы, мениски Максудова и т. п.), так как по своей природе работа менисковых линз совершенно аналогична работе воздушных прослоек.

Производя воздушную прослойку от поверхности склейки, мы тем самым определим наличие у воздушной прослойки свойств, присущих склеенной поверхности; чтобы исключить влияние этих свойств, целесообразно начать исследование работы воздушной прослойки со случая равенства показателей первой и последней среды, рассматривая вначале лишь влияние разности радиусов обеих поверхностей и величины воздушного промежутка вдоль оси.

Однако значительно удобнее воспользоваться не непосредственно разностью радиусов и величиной воздушного промежутка, а представить воздушную прослойку состоящей из двух прослоек — концентричной и с равными радиусами.

Такое разделение воздушной прослойки выгодно потому, что работа ее концентричной составляющей определяется величиной расстояния проходящего через прослойку луча от общего центра обеих поверхностей прослойки; кроме того, в концентричной прослойке более легко можно учесть разность показателей преломления для первой и последней среды.

Предположим, что имеется воздушная концентричная прослойка с одинаковыми показателями преломления первой и последней среды (фиг. 157).

Из чертежа следует

$$r_1 - r_2 = d. \quad (963)$$

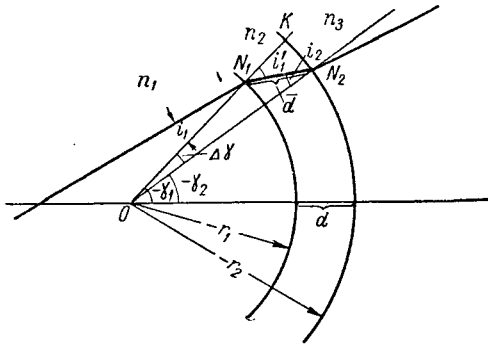
Считая величину  $d$  малой, можем из треугольника  $N_1KN_2$  (принимая отрезок дуги  $KN_2$  за прямую) определить величину гипотенузы  $N_1N_2$ :

$$\bar{d} = N_1N_2 = \frac{N_1K}{\cos i'_1} = \frac{d}{\cos i'_1}. \quad (964)$$

Величина длины дуги  $KN_2$  также легко определится:

$$KN_2 = \text{tg } i'_1 d; \quad (965)$$

отсюда легко может быть найдена разность углов  $\gamma$



$$\begin{aligned} \Delta\gamma &= \gamma_2 - \gamma_1 = \frac{KN_2}{r_2} = \\ &= -\frac{d}{r_2} \text{tg } i'_1. \end{aligned} \quad (966)$$

Но, с другой стороны, из треугольника  $ON_1N_2$

$$i'_1 - i'_2 = \Delta\gamma = -\frac{d}{r_2} \text{tg } i'_1, \quad (967)$$

откуда

$$\begin{aligned} i'_2 &= i'_1 + \frac{d}{r_2} \text{tg } i'_1 \approx \\ &\approx \left(1 + \frac{d}{r_2}\right) i'_1. \end{aligned} \quad (968)$$

Фиг. 157. Работа концентричной воздушной прослойки.

Обратимся к меридиональному инварианту

$$\frac{n' \cos^2 i'}{t'} - \frac{n \cos^2 i}{t} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r}. \quad (969)$$

Полагая для первой поверхности  $t_1 = \infty$  и имея в виду, что

$$t_2 = t'_1 - \bar{d} = t'_1 - \frac{d}{\cos i'_1}, \quad (970)$$

можем написать следующие выражения для меридионального инварианта на обеих поверхностях прослойки:

$$\frac{\cos^2 i'_1}{t'_1} = \frac{\cos i'_1 - n \cos i_1}{r_1} \quad (971)$$

и

$$\frac{n \cos^2 i'_2}{t'_2} - \frac{\cos^2 i_2}{t_2} = \frac{n \cos i'_2 - \cos i_2}{r_2} = \frac{n \cos i'_2 - \cos i_2}{r_1 - d}. \quad (972)$$

Складывая выражения (971) и (972), получаем

$$\frac{n \cos^2 i'_2}{t'_2} + \frac{\cos^2 i'_1}{t'_1} - \frac{\cos^2 i_2}{t_2} = \frac{\cos i'_1 - n \cos i_1}{r_1} - \frac{\cos i_2 - n \cos i'_2}{r_1 - d}. \quad (973)$$



Пользуясь формулой (970), можно преобразовать формулу (971)

$$\frac{\cos^2 i'_1}{t_2 + \frac{d}{\cos i'_1}} = \frac{1}{t_2} \cdot \frac{\cos^2 i'_1}{1 + \frac{d}{t_2 \cos i'_1}} = \frac{\cos i'_1 - n \cos i_1}{r_1} \quad (974)$$

и, аналогично, формулу (972)

$$\frac{n \cos^2 i'_2}{t'_2} - \frac{\cos i'_1 - n \cos i_1}{r_1} \left( 1 + \frac{d}{t_2 \cos i'_1} \right) \frac{\cos^2 i_2}{\cos^2 i'_1} = \frac{n \cos i'_2 - \cos i_2}{r_1 - d}. \quad (975)$$

Но так как на основании формулы (970)  $t_2$  мало отличается от  $t'_1$ , то, снова пользуясь формулой (971) или (973), получаем

$$\frac{n \cos^2 i'_2}{t'_2} = \frac{n \cos i'_2 - \cos i_2}{r_1 - d} - \frac{n \cos i_1 - \cos i'_1}{r_1} \cdot \frac{\cos^2 i'_2}{\cos^2 i'_1} \left[ 1 - \frac{n \cos i_1 - \cos i'_1}{r_1} \cdot \frac{d}{\cos^2 i'_1} \right]. \quad (976)$$

Обратимся к отношению  $\frac{\cos i_2}{\cos i'_1}$ . Пользуясь формулой (967), пишем

$$\frac{\cos i_2}{\cos i'_1} = \frac{\cos(i'_1 - \Delta\gamma)}{\cos i'_1} = \cos \Delta\gamma + \sin \Delta\gamma \operatorname{tg} i'_1 \quad (977)$$

или, пренебрегая величинами второго порядка малости,

$$\frac{\cos i_2}{\cos i'_1} = 1 - \frac{d}{r_2} \operatorname{tg}^2 i'_1. \quad (978)$$

На основании формулы (978) можно преобразовать формулу (976)

$$\frac{n \cos^2 i'_2}{t'_2} = \frac{n \cos i'_2 - \cos i_2}{r_1 - d} - \frac{n \cos i_1 - \cos i'_1}{r_1} \left[ 1 - \frac{2d}{r_2} \operatorname{tg}^2 i'_1 - \frac{n \cos i_1 - \cos i'_1}{r_1} \cdot \frac{d}{\cos^2 i'_1} \right]. \quad (979)$$

Вынося за общую скобку выражение  $\frac{n \cos i_1 - \cos i'_1}{r_1}$ , получаем

$$\frac{n \cos^2 i'_2}{t'_2} = \frac{n \cos i_1 - \cos i'_1}{r_1} \left\{ \frac{n \cos i'_2 - \cos i_2}{n \cos i_1 - \cos i'_1} \cdot \frac{r_1}{r_1 - d} - 1 + \frac{2d}{r_2} \operatorname{tg}^2 i'_1 + \frac{n \cos i_1 - \cos i'_1}{r_1} \cdot \frac{d}{\cos^2 i'_1} \right\}. \quad (980)$$

Согласно формуле (978)

$$\cos i_2 = \cos i'_1 - \frac{d}{r_2} \operatorname{tg}^2 i'_1 \cos i'_1 = \cos i'_1 \left( 1 - \frac{d}{r_2} \operatorname{tg}^2 i'_1 \right). \quad (981)$$

Возводя выражение (978) в квадрат, получаем

$$\frac{\cos^2 i_2}{\cos^2 i'_1} = \frac{1 - n^2 (1 - \cos^2 i'_2)}{1 - n^2 (1 - \cos^2 i_1)} = \left( 1 - \frac{d}{r_2} \operatorname{tg}^2 i'_1 \right)^2 \quad (982)$$

или

$$\frac{1 - n^2 + n^2 \cos^2 i'_2}{1 - n^2 + n^2 \cos^2 i_1} = \left( 1 - \frac{d}{r_2} \operatorname{tg}^2 i'_1 \right)^2. \quad (983)$$

Преобразуя формулу (983), полагая  $\operatorname{tg} i'_1 \approx \sin i'_1$  и отбрасывая члены высшего порядка малости, пишем

$$1 - n^2 + n^2 \cos^2 i'_2 = 1 - n^2 + n^2 \cos^2 i_1 - (1 - n^2 + n^2 \cos^2 i_1) \frac{2d}{r_2} \operatorname{tg}^2 i'_1 \quad (984)$$

и после сокращений

$$n^2 \cos^2 i'_2 = n^2 \cos^2 i_1 - \frac{2d}{r_2} \sin^2 i'_1 \quad (985)$$

или, деля на  $n^2$ ,

$$\cos^2 i_2 = \cos^2 i_1 - \frac{2d}{r_2} \sin^2 i_1, \quad (986)$$

откуда

$$\cos i'_2 = \cos i_1 \sqrt{1 - \frac{2d}{r_2} \operatorname{tg}^2 i_1} \approx \left(1 - \frac{d}{r_2} \operatorname{tg}^2 i_1\right) \cos i_1. \quad (987)$$

Пользуясь формулами (981) и (987), можем преобразовать формулу (980)

$$\frac{n \cos^2 i'_2}{t'_2} = \frac{n \cos i_1 - \cos i'_1}{r_1} \left\{ \frac{n \cos i_1 - \cos i'_1 - (n \operatorname{tg}^2 i_1 \cos i_1 - \operatorname{tg}^2 i'_1 \cos i'_1) \frac{d}{r_2}}{n \cos i_1 - \cos i'_1} \times \right. \\ \left. \times \frac{r_1}{r_1 - d} - 1 + \frac{2d}{r_2} \operatorname{tg}^2 i'_1 + \frac{n \cos i_1 - \cos i'_1}{r_1} \cdot \frac{d}{\cos^3 i'_1} \right\}, \quad (988)$$

или, после некоторых сокращений,

$$\frac{n \cos^2 i'_2}{t'_2} = \frac{n \cos i_1 - \cos i'_1}{r_1} \left\{ \frac{d}{r_2} - \frac{n \operatorname{tg}^2 i_1 \cos i_1 - \operatorname{tg}^2 i'_1 \cos i'_1}{n \cos i_1 - \cos i'_1} \cdot \frac{d}{r_2} + \right. \\ \left. + 2 \operatorname{tg}^2 i'_1 \cdot \frac{d}{r_2} + \frac{n \cos i_1 - \cos i'_1}{r_1} \cdot \frac{d}{\cos^3 i'_1} \right\}. \quad (989)$$

Полагая в последнем слагаемом  $r_1 = r_2$ , выносим за скобку общий множитель  $\frac{d}{r_2}$  и находим

$$\frac{n \cos^2 i'_2}{t'_2} = \frac{n \cos i_1 - \cos i'_1}{r_1} \left\{ - \frac{n \cos i_1 (1 + \operatorname{tg}^2 i_1) - \cos i'_1 (1 + \operatorname{tg}^2 i'_1)}{n \cos i_1 - \cos i'_1} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\cos^3 i'_1} + \frac{n \cos i_1 - \cos i'_1}{\cos^3 i'_1} \right\} \frac{d}{r_2} \quad (990)$$

или

$$\frac{n \cos^2 i'_2}{t'_2} = \frac{n \cos i_1 - \cos i'_1}{r_1} \left\{ - \frac{n}{\cos i_1} - \frac{1}{\cos i'_1} + \frac{2}{\cos^2 i'_1} + \right. \\ \left. + \frac{n \cos i_1 - \cos i'_1}{\cos^3 i'_1} \right\} \frac{d}{r_2}; \quad (991)$$

и далее, полагая  $r_2 = r_1 = r$ , получаем

$$\frac{n \cos^2 i'_2}{t'_2} = \left[ - \frac{n}{\cos i_1} + \frac{1}{\cos i'_1} + \frac{2}{\cos^2 i'_1} (n \cos i_1 - \cos i'_1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\cos^3 i'_1} (n \cos i_1 - \cos i'_1)^2 \right] \frac{d}{r^2}. \quad (992)$$

Раскрывая круглые скобки и делая сокращения, получим

$$\frac{n \cos^2 i'_2}{t'_2} = \left[ -\frac{n}{\cos i_1} + \frac{n^2 \cos^2 i_1}{\cos^3 i'_1} \right] \frac{d}{r^2} \quad (993)$$

или

$$\frac{n \cos^3 i'_2}{t'_2} = \left[ \frac{n^2 \cos^2 i_1}{\cos^3 i'_1} - \frac{n \cos^2 i_1}{\cos^3 i_1} \right] \frac{d}{r^2}, \quad (994)$$

и, деля на  $n$ ,

$$\frac{\cos^2 i'_2}{t'_2} = \left[ \frac{n}{\cos^3 i'_1} - \frac{1}{\cos^3 i_1} \right] \cos^2 i_1 \frac{d}{r^2}. \quad (995)$$

Полагая  $i'_2 = i_1$ , получим окончательно

$$\frac{1}{t'_2} = \left( \frac{n}{\cos^3 i'_1} - \frac{1}{\cos^3 i_1} \right) \frac{d}{r_2}. \quad (996)$$

Обратимся к сагиттальному инварианту

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r}. \quad (997)$$

Аналогично предыдущему

$$s_2 = s'_1 - \bar{d} = s'_1 - \frac{d}{\cos i'_1}. \quad (998)$$

Пользуясь формулой (998) и составляя выражения (997) для обеих поверхностей воздушной прослойки, можем написать при  $s_1 = \infty$

$$\frac{1}{s'_1} - \frac{n}{s_1} = \frac{1}{s'_1} = \frac{\cos i'_1 - n \cos i_1}{r_1} \quad (999)$$

и

$$\frac{n}{s'_2} - \frac{1}{s_2} = \frac{n \cos i'_2 - \cos i_2}{r_2} = \frac{n \cos i'_2 - \cos i_2}{r_1 - d}. \quad (1000)$$

Складывая выражения (999) и (1000), получаем

$$\frac{n}{s'_2} + \frac{1}{s'_1} - \frac{1}{s_2} = \frac{n \cos i'_2 - \cos i_2}{r_2} - \frac{n \cos i_1 - \cos i'_1}{r_1}, \quad (1001)$$

откуда на основании формул (998), (981) и (987)

$$\frac{n}{s'_2} = \frac{d}{s'_1 s_2 \cos i'_1} + \frac{n \cos i_1 - \cos i'_1 - n \frac{d}{r_2} \operatorname{tg}^2 i_1 \cos i_1 + \frac{d}{r_2} \operatorname{tg}^2 i'_1 \cos i'_1}{r_2} - \frac{n \cos i_1 - \cos i'_1}{r_1} \quad (1002)$$

или, полагая  $s_2 = s'_1$  и учитывая (999), пишем

$$\begin{aligned} \frac{n}{s'_2} = & \left( \frac{n \cos i_1 - \cos i'_1}{r_1} \right)^2 \frac{d}{\cos i'_1} + (n \cos i_1 - \cos i'_1) \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) - \\ & - (n \operatorname{tg}^2 i_1 \cos i_1 - \operatorname{tg}^2 i'_1 \cos i'_1) \frac{d}{r_2^2}; \end{aligned} \quad (1003)$$

полагая  $r_2 = r_1 = r$  и вынося за скобку  $\frac{d}{r^2}$ , находим:

$$\frac{n}{s'_2} = \left[ \frac{n^2 \cos^2 i_1}{\cos i'_1} - \frac{n}{\cos i_1} + \frac{1}{\cos i'_1} - \cos i'_1 \right] \frac{d}{r^2}. \quad (1004)$$

Делаем некоторые преобразования

$$\frac{n}{s'_2} = \left[ \frac{n^2 \cos^2 i_1}{\cos i'_1} - \frac{n}{\cos i_1} + \frac{n^2 \sin^2 i_1}{\cos i'_1} \right] \frac{d}{r^2} = \left( \frac{n^2}{\cos i'_1} - \frac{n}{\cos i_1} \right) \frac{d}{r^2} \quad (1005)$$

и окончательно, деля на  $n$ , получаем

$$\frac{1}{s'_2} = \left( \frac{n}{\cos i'_1} - \frac{1}{\cos i_1} \right) \frac{d}{r^2}. \quad (1006)$$

Формулы (996) и (1006) определяют нам астигматизм, вносимый concentричной воздушной прослойкой.

Переход к воздушной прослойке, разделяющей среды с разными показателями преломления, можно осуществить, полагая, что эта разность показателей вводится с помощью склеенной поверхности, совпадающей с одной из поверхностей рассматриваемой нами concentричной прослойки.

Если в формулах (996) и (1006) положим углы  $i_1$  и  $i'_1$  равными нулю, будет иметь место равенство

$$\frac{1}{t'_2} = \frac{1}{s'_2} = (n-1) \frac{d}{r^2} = \frac{1}{s'_0} \approx \varphi_0, \quad (1007)$$

представляющее собой оптическую силу concentричной воздушной прослойки на оси ( $\varphi > 0$ ).

Рассматривая случай тонкой concentричной линзы в воздухе, следует в формулах (969) и (997) принять для первой поверхности  $n = 1$ ,  $n' = n$  и, соответственно, для второй поверхности  $n = n$ ,  $n' = 1$ .

Тогда, после совершенно аналогичных уже выполненным выводам получим для величины меридионального «отрезка» следующее выражение:

$$\frac{1}{t'_2} = \left( \frac{1}{\cos^3 i'_1} - \frac{n}{\cos^3 i_1} \right) \frac{d}{nr^2} \quad (1008)$$

и для сагиттального «отрезка» соответственно:

$$\frac{1}{s'_2} = \left( \frac{1}{\cos i'_1} - \frac{n}{\cos i_1} \right) \frac{d}{nr^2}, \quad (1009)$$

переходящие, при углах  $i_1 = i'_1 = 0$ , в формулу

$$\frac{1}{t'_2} = \frac{1}{s'_2} = \frac{1}{s'_0} = -(n-1) \frac{d}{nr^2} \approx \varphi_0 \quad (1010)$$

для оптической силы тонкой линзы, хорошо известную из элементарной теории оптических приборов ( $\varphi_0 < 0$ ).

При выводе формул для астигматических пучков лучей, идущих под большими углами к оси системы, в случае двух или нескольких поверхностей большие затруднения создает наличие «косой» толщины—расстояния вдоль луча между поверхностями. Поэтому выгодно исключить из выводов «косую» толщину; в рассматриваемом случае тонкой concentричной воздушной прослойки это можно осуществить, разбив ее на два элемента: 1) две поверхности, пересекающиеся на главном луче, и 2) concentричную прослойку соответственной толщины.

Таким образом, приходим к тонкой «воздушной» линзе с острым краем (фиг. 158). Из чертежа следует

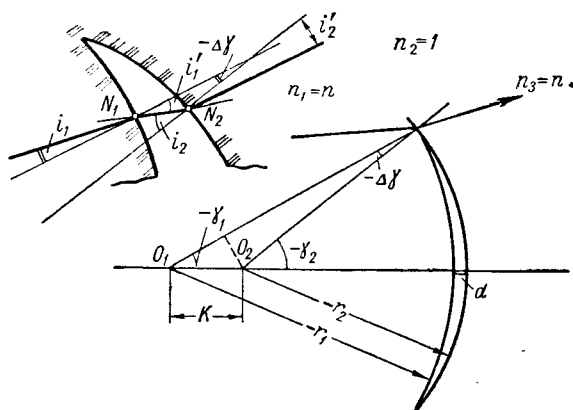
$$-r_1 = -r_2 + k \cos \gamma_1, \quad (1011)$$

откуда

$$\Delta r = r_2 - r_1 = k \cos \gamma_1; \quad (1012)$$

величина воздушного промежутка  $d$  легко определится по формуле

$$d = k - \Delta r = \frac{\Delta r}{\cos \gamma_1} - \Delta r = \left( \frac{1}{\cos \gamma_1} - 1 \right) \Delta r. \quad (1013)$$



Фиг. 158. Работа прослойки с острым краем.

Величина угла  $\Delta \gamma$  также легко находится из фиг. 158.

$$\Delta \gamma = -\frac{k \sin \gamma_1}{r_2} = -\frac{\Delta r}{r_2} \operatorname{tg} \gamma_1. \quad (1014)$$

Вследствие равенства косо́й толщины нулю ( $\bar{d} = 0$ ) будет иметь место равенство

$$t_2 = t'_1. \quad (1015)$$

Поэтому, пользуясь дважды меридиональным инвариантом и полагая, как и ранее,  $t_1 = \infty$ , можем написать

$$\frac{\cos^2 i'_1}{t'_1} = \frac{\cos^2 i'_1}{t_2} = \frac{\cos i'_1 - n \cos i_1}{r_1} \quad (1016)$$

и

$$\frac{n \cos^2 i'_2}{t'_2} = \frac{\cos^2 i_1}{t_2} = \frac{n \cos i'_2 - \cos i_2}{r_2}. \quad (1017)$$

Пользуясь этими двумя формулами, находим

$$\frac{n \cos^2 i'_2}{t'_2} = \frac{\cos^2 i_2}{\cos^2 i'_1} \cdot \frac{\cos i'_1 - n \cos i_1}{r_1} + \frac{n \cos i'_2 - \cos i_2}{r_2}. \quad (1018)$$

Из фиг. 158 следует

$$i_2 = i'_1 - \Delta\gamma = i'_1 + \frac{\Delta r}{r_2} \operatorname{tg} \gamma_1; \quad (1019)$$

имея в виду малость угла  $\Delta\gamma$ , пишем

$$\cos i_2 \approx \cos i'_1 - \frac{\Delta r}{r_2} \operatorname{tg} \gamma_1 \sin i'_1, \quad (1020)$$

откуда нетрудно получить отношение квадратов косинусов обоих углов

$$\frac{\cos^2 i_2}{\cos^2 i'_1} = \left(1 - \frac{\Delta r}{r_2} \operatorname{tg} \gamma_1 \operatorname{tg} i'_1\right)^2 \approx 1 - 2 \frac{\Delta r}{r_2} \operatorname{tg} \gamma_1 \operatorname{tg} i'_1. \quad (1021)$$

Выражая косинусы углов  $i_2$  и  $i'_1$  через синусы и используя закон преломления, получаем после некоторых преобразований

$$n^2 \cos^2 i'_2 = n^2 \cos^2 i_1 - 2 \frac{\Delta r}{r_2} \operatorname{tg} \gamma_1 \operatorname{tg} i'_1 \cos^2 i'_1. \quad (1022)$$

Извлекая из формулы (1022) квадратный корень и пользуясь двумя первыми членами разложения в ряд, находим

$$n \cos i'_2 = n \cos i_1 - \frac{\Delta r}{r_2} \operatorname{tg} i_1 \cos i'_1 \operatorname{tg} \gamma_1. \quad (1023)$$

Составляя разность между выражениями (1023) и (1020), получаем

$$n \cos i'_2 - \cos i_2 = n \cos i_1 - \cos i'_1 - \frac{\Delta r}{r_2} (\cos i'_1 \operatorname{tg} i_1 - \sin i'_1) \operatorname{tg} \gamma_1 \quad (1024)$$

или

$$n \cos i'_2 - \cos i_2 = (n \cos i_1 - \cos i'_1) \left(1 + \frac{\Delta r}{r_2} \operatorname{tg} i_1 \operatorname{tg} \gamma_1\right). \quad (1025)$$

Преобразуем величину  $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1 + \Delta r} = \frac{1}{r_1 \left(1 + \frac{\Delta r}{r_1}\right)}$ , откуда

$$\frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r_1} \left(1 - \frac{\Delta r}{r_1}\right). \quad (1026)$$

Пользуясь формулами (1021), (1025) и (1026), формулу (1018) можем преобразовать:

$$\begin{aligned} \frac{n \cos^2 i'_2}{i'_2} = \frac{\Delta r}{r_2} [(\cos i'_1 - n \cos i_1)(1 - 2 \operatorname{tg} i'_1 \operatorname{tg} \gamma_1) - \\ - (\cos i'_1 - n \cos i_1) \operatorname{tg} i_1 \operatorname{tg} \gamma_1], \end{aligned} \quad (1027)$$

или, окончательно

$$\frac{n \cos^2 i'_2}{i'_2} = \frac{\Delta r}{r_2} (\cos i'_1 - n \cos i_1) [1 - (2 \operatorname{tg} i'_1 + \operatorname{tg} i_1) \operatorname{tg} \gamma_1]. \quad (1028)$$

Обратимся к рассмотрению сагиттального пучка. Применяя сагиттальный инвариант, можно написать

$$\frac{1}{s_2} = \frac{1}{s'_1} = \frac{\cos i'_1 - n \cos i_1}{r_1} \quad (1029)$$

и

$$\frac{n}{s_2} - \frac{1}{s_2} = \frac{n \cos i_2 - \cos i_2}{r_2}, \quad (1030)$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \frac{n}{s_2'} &= \frac{\cos i_1' - n \cos i_1}{r_1} + \frac{n \cos i_2' - \cos i_2}{r_2} = \\ &= (\cos i_1' - n \cos i_1) \left[ \frac{1}{r_1} - \left( 1 + \frac{\Delta r}{r_2} \operatorname{tg} i_1 \operatorname{tg} \gamma_1 \right) \frac{1}{r_2} \right], \end{aligned} \quad (1031)$$

и окончательно

$$\frac{n}{s_2'} = (\cos i_1' - n \cos i_1) (1 - \operatorname{tg} i_1 \operatorname{tg} \gamma_1) \frac{\Delta r}{r^2}. \quad (1032)$$

## Глава XIX

### ПЕРЕНЕСЕНИЕ ПРЕДМЕТА В БЕСКОНЕЧНОСТЬ В ОБЪЕКТИВАХ СИММЕТРИЧНЫХ ТИПОВ

#### § 69. Дисторсия. Роль аберрации в зрачках

Ранее (§ 54, стр. 202) уже упоминалось о возможности компоновки оптических систем из двух симметричных относительно диафрагмы или пропорциональных друг другу половинок, учитывая, что в таких системах будет наблюдаться резкое уменьшение комы и других нечетных аберраций.

Эти особые свойства симметричных или близких к симметрии оптических систем послужили основанием для их широкого практического применения.

Однако строгое уничтожение нечетных аберраций возможно лишь в частном случае работы симметричной системы при увеличении минус единица; при других увеличениях симметричные системы не будут давать строгого уничтожения нечетных аберраций.

Поэтому на практике всегда возникает вопрос определения нечетных аберраций для симметричных систем, работающих при увеличениях, не равных минус единице, например для случая предмета, расположенного в бесконечности.

Кроме того, большой практический интерес представляют те или иные способы устранения подобных остаточных нечетных аберраций.

Перейдем к рассмотрению зависимости дисторсии от положения предмета.

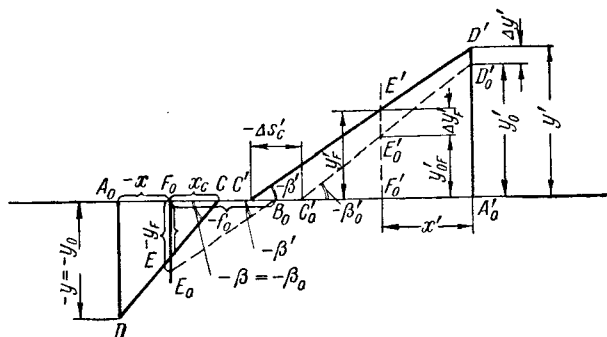
Общий метод составления двойного анастигмата из двух отдельных половин основывается на рассмотрении обеих половинок самостоятельно, причем каждая из них рассматривается при условии расположения предмета в бесконечности.

Переворачивая переднюю половинку и давая лучам обратный ход, а затем совмещая входные зрачки обеих половинок друг с другом,

мы получим целую систему, для которой предметом будет являться изображение от передней половинки, а изображением от целой системы будет являться изображение от задней половинки.

Таким образом, вся система будет работать при расположении предмета на конечном расстоянии.

В случае переноса предмета в бесконечность изображение перейдет в фокальную плоскость составленной системы; при этом аберрации системы соответственно изменятся. Этот переход потребует, очевидно,



Фиг. 159. Вывод зависимости дисторсии от положения предмета.

установления законов изменения аберраций в зависимости от положения предмета.

Подобная задача в области аберраций третьего порядка была подробно рассмотрена чл.-корр. АН СССР А. И. Тудоровским.

Для изменения дисторсии этот вопрос рассматривался Вандерслебом и Штебле; однако формулы, полученные Штебле для изменения дисторсии, весьма громоздки и поэтому мало применимы для практического использования.

Перейдем непосредственно к выводам (фиг. 159). На чертеже  $A_0D = -y = -y_0$  — предмет;  $A'_0D' = y'$  — его изображение;  $A'_0D'_0 = y'_0 = Vy_0$  — неискаженное идеальное изображение предмета;  $V$  — линейное увеличение;  $DCC'D'$  — ход реального главного луча до и после системы;  $DCC'_0D'_0$  — ход идеального главного луча (согласно оптике солинейного сродства);  $\beta = \beta_0$  — угол главного луча  $DC$  с оптической осью (до входа в систему);  $\beta'$  — угол главного луча  $C'D'$  с осью по выходе из системы;  $\beta_0$  — угол луча  $C'_0D'_0$  с осью;  $y'_F$  — изображение в задней фокальной плоскости, образуемое главным лучом;  $y'_{OF}$  — идеальное изображение в задней фокальной плоскости.

Составим уравнения реального и идеального главных лучей, принимая за ось абсцисс ось системы, а ось ординат полагая лежащей в фокальной плоскости, и принимая за начало координат задний фокус системы  $F'_0$ .

Соответственно будем иметь для реального главного луча  $C'D'$

$$y' = y'_F - x' \operatorname{tg} \beta' \quad (1033)$$



и для идеального главного луча  $C_0D_0$

$$y'_0 = y'_{0F} - x' \operatorname{tg} \beta'_0. \quad (1034)$$

Вычитая из уравнения (1033) уравнение (1034), получим

$$y' - y'_0 = y'_F - y'_{0F} - x' (\operatorname{tg} \beta' - \operatorname{tg} \beta'_0). \quad (1035)$$

Обозначим через  $\Delta y'$  и  $\Delta y'_F$  разности

$$y' - y'_0 = \Delta y' \quad \text{и} \quad y'_F - y'_{0F} = \Delta y'_F, \quad (1036)$$

представляющие собой дисторсию в плоскости изображения и в задней фокальной плоскости.

Величина  $x'$  может быть определена из формулы для линейного увеличения:

$$-x' = f'_0 V. \quad (1037)$$

Подставляя значения  $\Delta y'$  и  $\Delta y'_F$  из формул (1036) в формулу (1035) и разделив обе части на увеличение  $V$ , находим выражение

$$\frac{\Delta y' - \Delta y'_F}{V} = (\operatorname{tg} \beta' - \operatorname{tg} \beta'_0) f'_0 = \operatorname{const}, \quad (1038)$$

справедливое для произвольных увеличений. Имея в виду, что

$$\frac{\operatorname{tg} \beta'_0}{\operatorname{tg} \beta_0} = W_C \quad (1039)$$

( $W_C$  — угловое увеличение в точках  $C$  и  $C_0$ ) и что  $\beta = \beta_0$ , можно формулу (1038) переписать в виде

$$\frac{\Delta y' - \Delta y'_F}{V} = (\operatorname{tg} \beta' - W_C \operatorname{tg} \beta) f'_0 = \operatorname{const}. \quad (1040)$$

Так как угловое увеличение

$$W = \frac{x}{f'}, \quad (1041)$$

то правая часть формулы (1040) преобразуется:

$$\frac{\Delta y' - \Delta y'_F}{V} = f'_0 \operatorname{tg} \beta' - x_C \operatorname{tg} \beta = \operatorname{const}. \quad (1042)$$

Рассматривая переднюю фокальную плоскость (фиг. 159), определяем величину изображения в ней —  $y_F$ . Из треугольника  $F_0CE$  следует

$$y_F = x_C \operatorname{tg} \beta. \quad (1043)$$

Точно так же легко определится и величина неискаженного изображения при обратном ходе луча. С этой целью построим вспомогательный треугольник  $F_0B_0E_0$ , где  $B_0$  — передняя узловая (главная) точка, а точка  $E_0$  определяется вспомогательной прямой, составляющей угол  $\beta'$  с осью системы. Из треугольника получаем (для случая  $n = n'$ , когда  $f'_0 = -f_0$ )

$$-y_{0F} = f_0 \operatorname{tg} \beta' = -f'_0 \operatorname{tg} \beta'. \quad (1044)$$

Подставляя значения  $y_F$  и  $y_{0F}$  в формулу (1042), находим

$$\frac{\Delta y' - \Delta y'_F}{V} = y_{0F} - y_F = -\Delta y_F = \text{const.} \quad (1045)$$

Умножая уравнение (1045) на увеличение  $V$  и перенося  $\Delta y'_F$  в правую часть, получим

$$\Delta y' = \Delta y'_F - V \Delta y_F. \quad (1046)$$

Развивая формулу (1045) для различных увеличений, имеем

$$\frac{\Delta y' - \Delta y'_F}{V} = \frac{\Delta y'_1 - \Delta y'_F}{V_1} = \frac{\Delta y'_2 - \Delta y'_F}{V_2} = \dots = -\Delta y_F = \text{const}, \quad (1047)$$

откуда следует, что из известных  $\Delta y'_F$  и  $\Delta y_F$  можно получить величину дисторсии при любом заданном увеличении.

С другой стороны, если, кроме дисторсии  $\Delta y'_F$ , будет известна дисторсия  $\Delta y'$  при каком-либо увеличении  $V$ , то можно определить величину постоянной  $-\Delta y_F$ , а следовательно, и дисторсию при любом заданном увеличении.

Очевидно, что знание дисторсии при каких-либо двух увеличениях (например,  $V$  и  $V_1$ ) позволяет определить величину дисторсии  $\Delta y_F$  в фокальной плоскости. Действительно

$$\frac{\Delta y'}{V} - \frac{\Delta y'_1}{V_1} = \left( \frac{1}{V} - \frac{1}{V_1} \right) \Delta y'_F. \quad (1048)$$

Рассмотрим частный случай пропорциональной системы. Подобная система, как известно, свободна от дисторсии (т. е.  $\Delta y'_i = 0$ ) при увеличении  $V_1 = -N$ , равному коэффициенту пропорциональности. Тогда, на основании формулы (1048), получаем

$$\Delta y' = \left( 1 + \frac{V}{N} \right) \Delta y'_F. \quad (1049)$$

В силу пропорциональности углы  $\beta$  и  $\beta'$  строго равны друг другу, и для определения  $\Delta y'_F$  можно воспользоваться величиной аберрации в выходном зрачке  $\Delta s'_C$  — расстоянием точки пересечения главного луча с осью системы от задней узловой точки. Реальный и идеальный главные лучи (в силу пропорциональности системы) будут, очевидно, параллельны друг другу, так как

$$\beta'_0 = \beta_0 = \beta = \beta'. \quad (1050)$$

Однако в пространстве предметов реальный главный луч не будет совпадать с идеальным, отступая от него на величину аберрации во входном зрачке.

В силу этого равенство  $\beta' = \beta'_0$  не обратит в нуль постоянную в формуле (1038), так как в этой формуле  $\beta'_0$  и  $\beta'$  соответствуют совпадению реального и идеального главных лучей в пространстве предметов.

Тогда величина  $\Delta y'_F$  определится как произведение из аберрации в выходном зрачке  $\Delta s'_C$  на  $\text{tg } \beta'$ , т. е.

$$\Delta y'_F = -\Delta s'_C \text{tg } \beta', \quad (1051)$$

и формула (1049) примет хорошо известный вид

$$\Delta y' = - \left( 1 + \frac{V}{N} \right) \Delta s'_c \operatorname{tg} \beta'. \quad (1052)$$

## § 70. Изменение астигматизма при изменении положения предмета

Обратимся к формуле (50) в § 5, гл. 1:

$$(x_0 + \Delta_V - \Delta_F)(x'_0 + \Delta'_V - \Delta'_F) = \bar{f}\bar{f}' = \text{const.} \quad (1053)$$

Эта исходная формула, как указывалось ранее, является справедливой как для меридиональных, так и для сагиттальных пучков лучей.

Предположим, что кривизна предмета  $\Delta_V = 0$ ; выражая отрезки  $x_0$  и  $x'_0$  через увеличение  $V$  и фокусное расстояние системы, получим

$$\left( \frac{f'_0}{V} - \Delta_F \right) (-f'_0 V + \Delta'_V - \Delta'_F) = \bar{f}\bar{f}'; \quad (1054)$$

раскрывая скобки и делая перемножения, напишем

$$- \left( f_0'^2 - f_0' \frac{\Delta'_V}{V} + f_0' \frac{\Delta'_F}{V} - f_0' V \Delta_F + \Delta_F \Delta'_V - \Delta_F \Delta'_F \right) = \bar{f}\bar{f}', \quad (1055)$$

откуда, пренебрегая величинами высшего порядка малости и полагая  $\Delta_F = -\Delta'_F$ ,

$$- f_0' \frac{\Delta'_V}{V} = - \bar{f}\bar{f}' - f_0'^2 - \left( \frac{1}{V} + V \right) f_0' \Delta'_F. \quad (1056)$$

Составим разность выражений (1056) для двух каких-либо различных увеличений  $V$  и  $V_1$ . Находим

$$- f_0' \left( \frac{\Delta'_V}{V} - \frac{\Delta'_{V_1}}{V_1} \right) = - \left[ \left( \frac{1}{V} + V \right) - \left( \frac{1}{V_1} + V_1 \right) \right] f_0' \Delta'_F. \quad (1057)$$

Полагая линейное увеличение  $V_1 = +1$  и принимая кривизну изображения  $\Delta'_{V_1} = 2\Delta'_C$ , т. е. удвоенной меридиональной или сагиттальной кривизне в выходном зрачке, получаем

$$\Delta'_V = 2V\Delta'_C + [1 - 2V + V^2] \Delta'_F, \quad (1058)$$

или, окончательно,

$$\Delta'_V = 2V\Delta'_C + (1 - V)^2 \Delta'_F. \quad (1059)$$

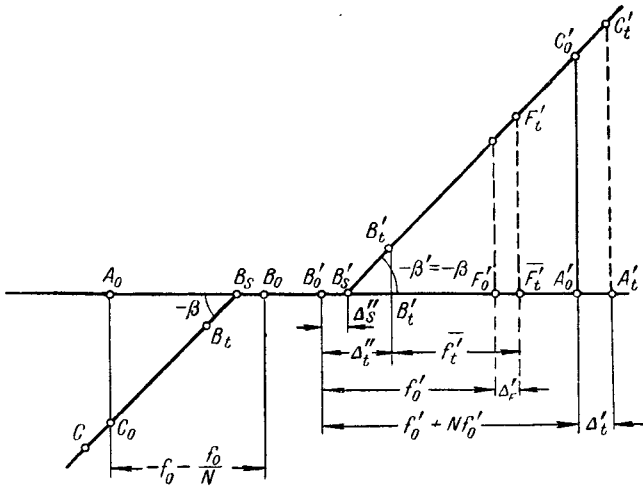
Рассмотрим изменение астигматизма для системы, составленной из двух пропорциональных половинок, когда предмет из положения, определяемого равенством  $V = -N$ , переносится в бесконечность.

Обратимся к чертежу (фиг. 160), на котором представлен ход главного луча через систему, составленную из двух пропорциональных половинок.

Для задней половинки предполагаются известными астигматизм — меридиональная кривизна  $\Delta'_i$  и сагиттальная кривизна  $\Delta'_s$  — для предмета, лежащего в бесконечности и для предмета, расположенного в центре входного зрачка  $\Delta''_i$  и  $\Delta''_s$ .

Исходя из условия пропорциональности, можно сделать вывод, что углы  $\beta$  и  $\beta'$  должны быть равны друг другу и что точки  $B_0, B_s, B_t$  и  $B'_0, B'_s, B'_t$  будут играть роль узловых (и одновременно главных) точек соответственно для нулевых, сагиттальных и меридиональных пучков лучей. (Для сагиттальных точек  $C_s, C'_s$  и т. д. должен быть сделан аналогичный чертеж).

Кроме того, из того же условия пропорциональности вытекает равенство линейных увеличений для нулевых, сагиттальных и мери-



Фиг. 160. Вывод формул для астигматизма системы, составленной из пропорциональных друг другу половинок.

диональных пучков коэффициенту пропорциональности, взятому с обратным знаком. Таким образом,

$$V_0 = V_s = V_t = -N. \tag{1060}$$

Сообразно этому, расстояния от главных точек  $B'_0, B'_s$  и проекции точки  $B'_t$  на ось  $\bar{B}'_t$  до соответствующих точек изображения  $A'_0$ , и проекций точек  $C'_s$  и  $C'_t$  на ось  $A'_s$  и  $A'_t$  должны быть равны:

$$\left. \begin{aligned} B'_0 A'_0 &= f'_0 + x'_0 = f'_0 + N f'_0 = (1 + N) f'_0 \\ B'_s A'_s &= (1 + N) \bar{f}'_s \\ \bar{B}'_t A'_t &= (1 + N) \bar{f}'_t \end{aligned} \right\} \tag{1061}$$

где  $\bar{f}'_s$  и  $\bar{f}'_t$  — проекции на ось сагиттального и меридионального главных фокусных расстояний  $f'_s$  и  $f'_t$ :

$$\bar{f}'_s = f'_s \cos \beta' \quad \text{и} \quad \bar{f}'_t = f'_t \cos \beta'.$$

Далее, из того же чертежа следует:

$$\left. \begin{aligned} \Delta'_s + \bar{f}'_s + N\bar{f}'_s &= f'_0 + Nf'_0 + \Delta'_s \\ \Delta'_i + \bar{f}'_i + N\bar{f}'_i &= f'_0 + Nf'_0 + \Delta'_i \end{aligned} \right\} \quad (1062)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \Delta''_s + \bar{f}'_s &= f'_0 + \Delta'_{F_s} \\ \Delta''_i + \bar{f}'_i &= f'_0 + \Delta'_{F_i} \end{aligned} \right\} \quad (1063)$$

Деля формулы (1062) на  $1 + N$  и вычитая их из формул (1063), получаем

$$\Delta''_s - \frac{\Delta'_s}{1+N} = \Delta'_{F_s} - \frac{\Delta'_s}{1+N}; \quad \Delta''_i - \frac{\Delta'_i}{1+N} = \Delta'_{F_i} - \frac{\Delta'_i}{1+N}, \quad (1064)$$

откуда

$$\Delta'_{F_s} = \frac{\Delta'_s + N\Delta''_s}{1+N}; \quad \Delta'_{F_i} = \frac{\Delta'_i + N\Delta''_i}{1+N}. \quad (1065)$$

В случае симметричной системы  $N = 1$ . Тогда

$$\Delta'_{F_s} = \frac{\Delta'_s + \Delta''_s}{2}; \quad \Delta'_{F_i} = \frac{\Delta'_i + \Delta''_i}{2}. \quad (1066)$$

## § 71. Изменение комы при изменении положения предмета

Обратимся сначала к симметричной системе.

Если строго симметричная система работает при увеличении  $V = -1$ , то она, как известно, свободна от комы для произвольных величин предмета и изображения.

Рассматривая ход лучей в меридиональной плоскости в наклонном пучке для этого случая, мы всегда можем разыскать в рассматриваемом пучке два луча (расположенные по обе стороны от главного луча), ход которых через данную систему будет строго симметричным.

Нетрудно себе представить, что на этих лучах можно отыскать как фокальные, так и узловые точки; помня, что узловые фокусные расстояния вдоль любого луча для системы, расположенной в одной и той же среде (например, в воздухе), должны быть равны между собой, можно, сопоставляя эти фокусные расстояния с фокусными расстояниями вдоль главного луча, сделать вывод, что все эти фокусные расстояния отличаются друг от друга лишь на величину высшего порядка малости относительно апертурных углов в наклонном пучке.

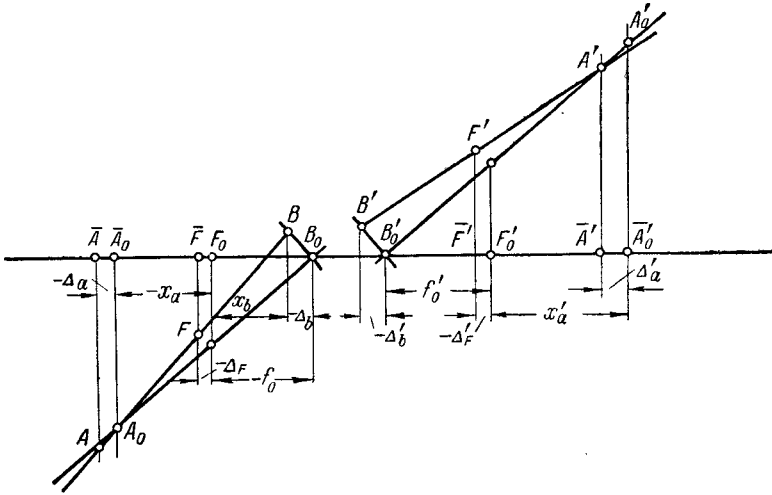
Отсюда вытекает, что фокальные и узловые точки на любом произвольном луче в наклонном пучке будут лежать, в первом приближении, на прямых, перпендикулярных главному лучу и проходящих через фокальные и узловые точки на главном луче.

Совершенно ясно, что проекции узловых и фокальных точек произвольного и главного лучей на ось для симметричной системы в общем случае не должны совпадать друг с другом. Нет никаких оснований полагать, что такое несовпадение проекций узловых и фокальных точек есть исключительное свойство строго симметричных систем;

наоборот, можно предположить, что несовпадение проекций узловых и фокальных точек, лежащих на произвольном и главном лучах наклонного пучка есть общее свойство для самых различных оптических систем и совпадение этих проекций может иметь место лишь в некоторых частных случаях.

Рассмотрим чертеж (фиг. 161), на котором представлен ход некоторого луча  $ABB'A'$ , не проходящего через центры  $B_0$  и  $B'_0$  входного и выходного зрачков, через которые проходит главный луч  $A_0B_0B'_0A'_0$ .

Сделаем допущение, что рассматриваемая система свободна от меридионального искривления изображения при всех увеличениях.



Фиг. 161. Вывод формул для комы системы, составленной из пропорциональных половинок.

Тогда, согласно формуле (50) в § 5, гл. I, можно написать

$$\left. \begin{aligned} (x_a + \Delta_a - \Delta_F)(x'_a + \Delta'_a - \Delta'_F) &= \bar{f}\bar{f}' = \text{const} \\ (x_b + \Delta_b - \Delta_F)(x'_b + \Delta'_b - \Delta'_F) &= \bar{f}\bar{f}' \end{aligned} \right\} \quad (1067)$$

Деляя перемножения и приравнивая друг к другу оба выражения (1067) получаем

$$\begin{aligned} x_a x'_a + (\Delta_a - \Delta_F) x'_a + (\Delta'_a - \Delta'_F) x_a + \\ + (\Delta_a - \Delta_F)(\Delta'_a - \Delta'_F) = x_b x'_b + (\Delta_b - \Delta_F) x'_b + (\Delta'_b - \Delta'_F) x_b + \\ + (\Delta_b - \Delta_F)(\Delta'_b - \Delta'_F); \end{aligned} \quad (1068)$$

имея в виду, что  $x_a x'_a = x_b x'_b$ , и пренебрегая величинами второго порядка малости, находим

$$(\Delta_a - \Delta_F) x'_a + (\Delta'_a - \Delta'_F) x_a = (\Delta_b - \Delta_F) x'_b + (\Delta'_b - \Delta'_F) x_b. \quad (1069)$$



и аналогично

$$R_a = \frac{\Delta_a}{u \cos \beta} = \frac{\Delta_a(f_0 + x_a)}{h \cos^2 \beta}, \quad (1075 \text{ а})$$

где  $u$  и  $u'$  — апертурные углы в наклонных пучках в пространстве предметов и в пространстве изображений;

$\beta$  и  $\beta'$  — полевые углы в соответственных пространствах (в рассматриваемом нами случае они предполагаются равными по величине);

$h$  и  $h'$  — высоты произвольного луча относительно главного луча для узловых точек  $B$  и  $B'$  (также равные между собой).

В случаях, когда предмет или изображение будет находиться в передней или задней фокальной плоскости, соответственно должно иметь место равенство нулю отрезков  $x_a$  или  $x'_a$ . Тогда, очевидно, радиусы  $R_a$  или  $R'_a$  перейдут, соответственно, в  $R_F$  или  $R'_F$ ; согласно формулам (1075), получим

$$R'_F = \frac{\Delta'_F}{h' \cos^2 \beta'} f'_0; \quad R_F = \frac{\Delta_F}{h \cos^2 \beta} f_0. \quad (1076)$$

Возвратимся к формуле (1074). Умножая эту формулу на отношение  $f'_0$  к  $h \cos^2 \beta$ , находим

$$\frac{\Delta'_a f'_0}{h \cos^2 \beta} - \frac{\Delta_a V_a^2 f'_0}{h \cos^2 \beta} = (1 - V_a) \left[ \frac{\Delta'_F f'_0}{h \cos^2 \beta} + \frac{\Delta_F V_a f'_0}{h \cos^2 \beta} \right]. \quad (1077)$$

Пользуясь формулами (1075) и (1076) и помня, что  $h = h'$ , а  $\beta = \beta'$ , определяем

$$\frac{R'_a}{\frac{x'_a}{f'_0} + 1} - \frac{R_a V_a^2}{\left(1 + \frac{x_a}{f_0}\right)} = (1 - V_a) (R'_F - V_a R_F), \quad (1078)$$

и окончательно получаем

$$R_a - V_a^2 R_a = (1 - V_a)^2 (R'_F - V_a R_F). \quad (1079)$$

Для симметричной системы должно иметь место равенство

$$R'_F = -R_F, \quad (1080)$$

и тогда формула (1079) преобразуется

$$R'_a - V_a^2 R_a = (1 - V_a)^2 (1 + V_a) R'_F. \quad (1081)$$

В частных случаях, когда предмет свободен от комы ( $R_a = 0$ ), должны соблюдаться равенства

$$V_a = 0; \quad R'_a = R'_F;$$

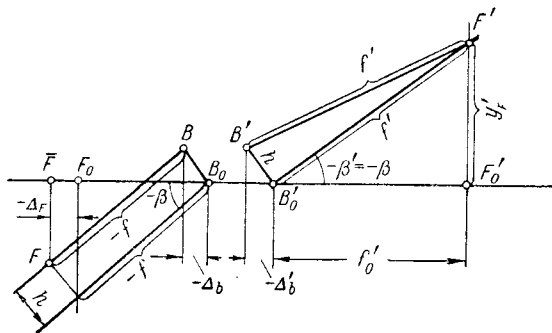
$$V_a = -1; \quad R'_a = 0;$$

$$V_a = +1; \quad R'_a = 0.$$

В случае системы с симметричным ходом главного луча в пространстве предметов и в пространстве изображений, которая предполагается исправленной в отношении комы для предмета, лежащего в бес-



конечности, мы вправе считать, что узловые фокусные расстояния для произвольного и главного лучей наклонного пучка равны друг другу; отсюда вытекает, что величина  $\Delta_F$  (смещение проекции переднего фокуса на произвольном луче по отношению к переднему фокусу системы) равна величине  $\Delta_b$  (смещение проекции передней узловой точки на произвольном луче относительно передней узловой точки на главном луче) согласно чертежу (фиг. 163).



Фиг. 163. Переход к положению предмета в бесконечности.

Поэтому, возвращаясь к формуле (1079), можно задать значение  $R'_F = 0$ ; тогда

$$R'_a = -(1 - V_a)^2 V_a R_F. \quad (1082)$$

Величина  $R_F$  может быть определена согласно (1076) и фиг. 163.

$$R_F = \frac{\Delta_F}{h \cos^2 \beta} f_0 = \frac{\Delta_b}{h \cos^2 \beta} f_0 = \frac{f_0 \sin \beta}{\cos^2 \beta} \quad (1083)$$

или

$$R_F = -\frac{f'_0 \operatorname{tg} \beta}{\cos \beta} = \frac{y'_F}{\cos \beta}, \quad (1084)$$

после чего формула (1082) может быть преобразована

$$R'_a = -(1 - V_a)^2 V_a \frac{y'_F}{\cos \beta}; \quad (1085)$$

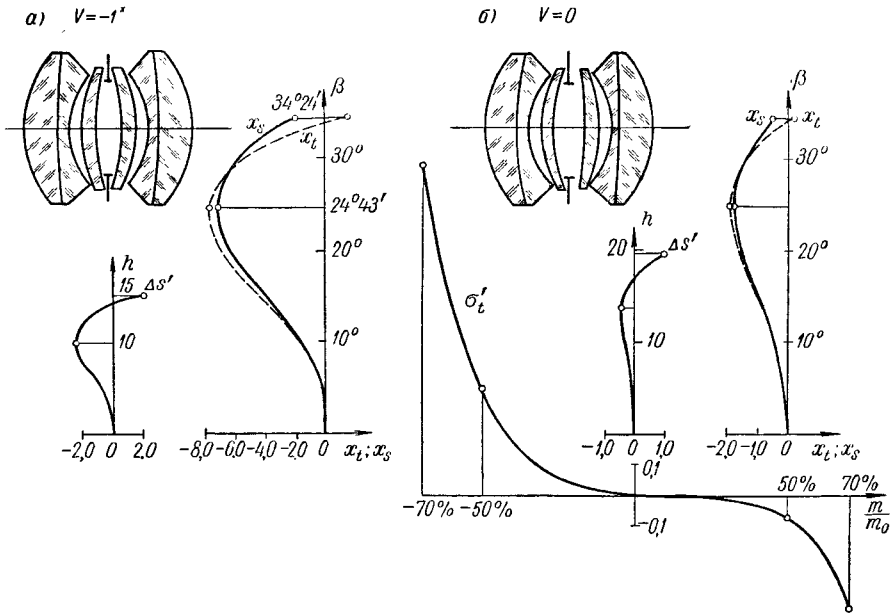
в частности, задавая  $V_a = -1$ , напишем

$$R'_{V_a=-1} = \frac{4y'_F}{\cos \beta}. \quad (1086)$$

Если рассматриваемая система составлена из двух подобных друг другу половин с коэффициентом пропорциональности, равным  $N$ , и радиусами кустик, равными соответственно

$$R_N = -R'_0; \quad R'_N = NR'_0, \quad (1087)$$

Схема симметричного объектива Руссар-Плазмат представлена на фиг. 166 слева; справа показана схема объектива, перестроенная для бесконечно удаленного предмета. На этой же фигуре показаны и графики aberrаций обоих объективов.



Фиг. 166. Переход от симметричной конструкции Плазмата к несимметричной.

При переходе к положению предмета в бесконечности величины углов  $\alpha$  и радиусы преобразуются следующим образом:

$\alpha_1 = 0,000$	$h_1 = 100,70$	$r_1 = 46,65$		
$\alpha_2 = 0,82$	$h_2 = 92,58$	$r_2 = 103,25$	$d_1 = 9,90$	$n_2 = 1,6126$
$\alpha_3 = 0,773$	$h_3 = 92,34$	$r_3 = 30,48$	$d_2 = 0,32$	$n_3 = 1$
$\alpha_4 = 1,63$	$h_4 = 73,56$	$r_4 = 21,17$	$d_3 = 11,52$	$n_4 = 1,6126$
$\alpha_5 = 0,50$	$h_5 = 59,56$	$r_5 = -24,07$	$d_4 = 28,00$	$n_5 = 1$
$\alpha_6 = -0,63$	$h_6 = 66,82$	$r_6 = -32,93$	$d_5 = 11,52$	$n_6 = 1,6126$
$\alpha_7 = 0,227$	$h_7 = 66,74$	$r_7 = 646,24$	$d_6 = 0,32$	$n_7 = 1$
$\alpha_8 = 0,18$	$h_8 = 64,96$	$r_8 = -56,07$	$d_7 = 9,90$	$n_8 = 1,6126$
$\alpha_9 = 1,00$				$h_0 = 66,56$
		$f' = 100,70$	$s'_F = 64,96$	

Симметричный объектив типа Планар				Несимметричный объектив					
$h$	$\Delta s'$	$\beta_1$	$x_t$	$x_s$	$h$	$\Delta s'$	$\beta_1$	$x_t$	$x_s$
9,5	— 1,40	— 18°00'	+ 1,02	— 0,81	14,39	0,01	— 18°15'	1,16	— 0,07
13,31	0,22	— 23°20'	— 0,92	— 0,20	20,14	0,76	— 25°44'	1,30	0,22

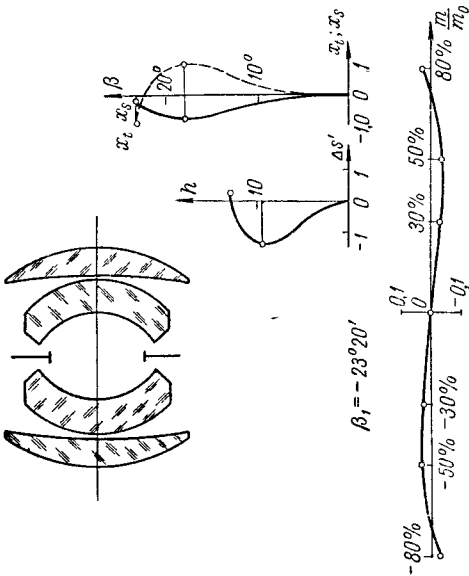
  

Наклонный пучок				Наклонный пучок				
$\beta_1$	$m/m_0$ в %			$\beta_1$	$m/m_0$ в %			
	30	50	80		— 80	— 50	+ 80	
— 18°00'	0,028	0,045	0,172	— 25°44'	— 0,89	— 0,30	— 0,08	— 0,28
— 23°20'	— 0,026	— 0,032	0,028					

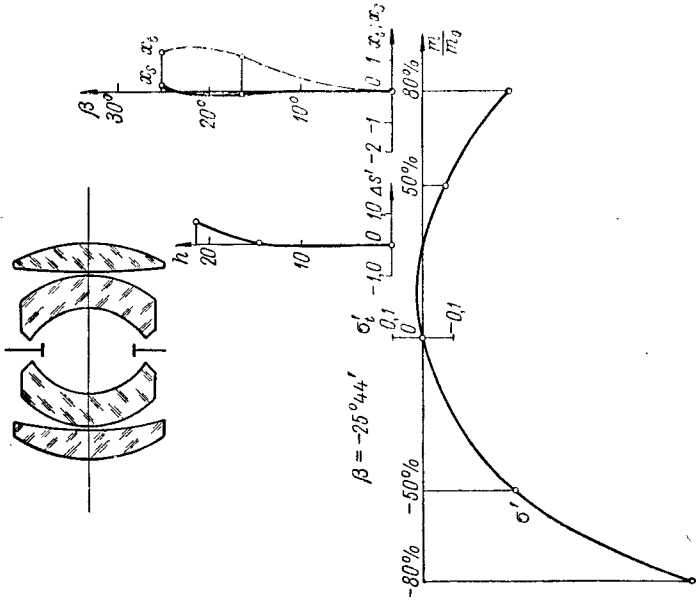
На «зоне» чувствуется положительная меридиональная кривизна.

Наблюдается довольно ошутимая кома и положительная меридиональная кривизна.

a)  $V = -1^*$



b)  $V = 0$



Фиг. 167. Переход от симметричного объектива из четырех линз к несимметричному.

Схема симметричного объектива представлена на фиг. 167 слева; схема объектива, перестроенного для положения предмета в бесконечности — на фиг. 167 справа; на той же фигуре приведены графики aberrаций; в табл. 21 приведены результаты тригонометрического расчета для обоих объективов.

## Глава XX

### ИЗОПЛАНАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

#### § 73. Графоаналитический метод составления системы из изопланатических поверхностей

Задача создания оптической системы с достаточно большим и однородным по качеству изображению полем зрения при больших относительных отверстиях теснейшим образом связана с обеспечением постоянства сферической aberrации по полю зрения.

Ранее (§ 55) уже рассматривались частные случаи постоянства сферической aberrации по полю зрения. Комбинируя какую-либо оптическую систему из поверхностей, для каждой из которых соблюдается условие постоянства сферической aberrации по полю зрения при одновременном отсутствии комы и астигматизма, т. е. из изопланатических поверхностей, мы получим систему, которая будет обладать теми же свойствами — постоянством сферической aberrации, отсутствием комы и отсутствием астигматизма, иными словами, также будет по своим свойствам изопланатической.

Для решения этой задачи весьма выгодно воспользоваться поверхностями, для которых предмет и изображение располагаются в их апланатических точках (апланатические поверхности) и изображение становится свободным от сферической aberrации, комы и астигматизма, или преломляющими поверхностями, нормальными к главному лучу (концентрическими поверхностями); для таких поверхностей изображение также будет свободным от комы и астигматизма; но при этом сферическая aberrация по полю зрения будет постоянна, но не равна нулю.

Таким образом, концентрические поверхности по своим свойствам также принадлежат к числу изопланатических поверхностей.

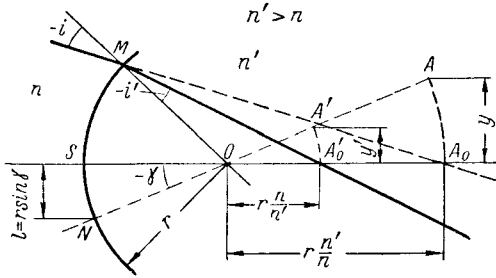
Так как апланатические поверхности всегда можно рассматривать как частный случай изопланатических поверхностей, обладающих сферической aberrацией, равной нулю, то система, построенная только из концентрических и апланатических поверхностей, явится одним из частных случаев изопланатической системы (в общем случае изопланатические системы могут быть построены и не из изопланатических поверхностей).

В § 50 (3-й случай) мы определили апланатические точки сферической поверхности, исходя из равенства линейного увеличения

квадрату отношения показателей преломления до и после преломляющей поверхности.

Пользуясь формулами (672), (673) и (674), можно определить расстояния  $q$  и  $q'$  от апланатических точек до центра преломляющей поверхности.

Можно показать, что геометрическим местом апланатических точек для сферической поверхности будут являться две сферы, построенные из центра преломляющей поверхности радиусами  $q$  и  $q'$ , причем каждая пара апланатических точек определится точками пересечения



Фиг. 168. Работа апланатической поверхности.

прямой, проходящей через центр поверхности с обеими сферами апланатических точек.

Рассмотрим чертеж (фиг. 168), на котором представлена преломляющая сферическая поверхность радиуса  $r$ , с центром в точке  $O$ , разделяющая две среды с показателями преломления  $n$  и  $n'$ ; здесь  $A$  и  $A'$  — апланатические точки этой поверхности, лежащие на некоторой прямой  $OA'A$ , составляющей угол  $\gamma$  с осью системы  $OA_0A_0$ .

Так как, согласно формулам (672), (673) и (674) в § 50, расстояния апланатических точек  $A$  и  $A'$  от центра поверхности  $O$  равны

$$-q = OA = r \frac{n'}{n}; \quad -q' = OA' = r \frac{n}{n'}, \quad (1091)$$

то, пользуясь этими формулами, можно определить расстояния  $y$  и  $y'$  апланатических точек  $A$  и  $A'$  от оси:

$$y = -r \frac{n'}{n} \sin \gamma; \quad y' = -r \frac{n}{n'} \sin \gamma. \quad (1092)$$

Нетрудно определить также и величину расстояния  $l$  от оси до точки пересечения прямой, определяющей положение апланатических точек, с поверхностью:

$$l = r \sin \gamma. \quad (1093)$$

Из формул (1092) и (1093) следует:

$$l = -\frac{n}{n'} y; \quad y' = -\frac{n}{n'} l = \left(\frac{n}{n'}\right)^2 y. \quad (1094)$$

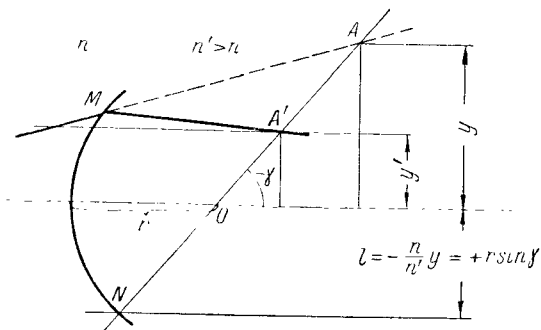
Для определения величины радиуса и положения центра апланатической поверхности можно, согласно формуле (1094), использовать следующий графический прием (фиг. 169).

1. Зная положение и величину предмета  $y$ , вычисляем величину изображения  $y'$  и проводим на этом расстоянии прямую, параллельную оси системы.

2. Вычисляем величину  $l = -\frac{n}{n'}y$  и проводим на этом расстоянии вторую прямую, параллельную оси, но по другую ее сторону.

3. Через вершину предмета  $A$  проводим произвольно ориентированную прямую  $OA$ .

Точка пересечения  $O$  этой прямой с осью системы определит положение центра апланатической поверхности; расстояние от центра  $O$  до точки  $N$  пересечения этой произвольной прямой с прямой, проведенной параллельно оси на расстоянии  $l$ , явится величиной радиуса кривизны поверхности  $r'$ ; положение апланатической точки изображения  $A'$  определится точкой пересечения произвольной прямой с прямой, проведенной параллельно оси на расстоянии  $y'$ .



Фиг. 169. Построение положения предмета и изображения для апланатической поверхности.

Этот простой графический прием позволяет очень быстро отыскивать положение и определять величину радиуса апланатической поверхности, а также отыскивать положение изображения, не имея в своем распоряжении даже направления хода главного луча.

В силу этого мы можем выбирать направление хода главного луча, проходящего через вершину предмета, совершенно произвольно, по своему усмотрению.

Задав какой-либо ход главного луча в пространстве предметов и выбрав положение апланатической поверхности, мы однозначно определим и ход главного луча после преломления.

При этом в силу свойств апланатических точек широкий гомоцентрический пучок лучей, исходящий из точки  $A$ , соберется в точке  $A'$  также строго гомоцентрично, а следовательно, точка  $A'$  будет свободна от сферической аберрации, комы и астигматизма.

Далее, мы могли бы принять изображение, полученное после первой апланатической поверхности, за предмет, расположенный перед второй апланатической поверхностью, и получить после нее изображение, также свободное от сферической аберрации, комы и астигматизма.

Есть и другой прием. Отыскав точку пересечения преломленного первой апланатической поверхностью главного луча с осью системы, можно поместить в этой точке центр второй преломляющей поверх-

ности; такая поверхность является нормальной к главному лучу и в силу этого свободна от комы и астигматизма и для широких пучков лучей, но не свободна от сферической аберрации. Однако сферическая аберрация такой поверхности одинакова для любого участка поля и равна сферической аберрации той же самой поверхности на оси системы.

Таким образом, широкий пучок после преломления на концентричной поверхности утратит свою гомоцентричность, но не приобретет ни комы, ни астигматизма.

Изображение же после концентричной поверхности можно рассматривать, как предмет для последующей — апланатической — или снова концентричной поверхности; в обоих случаях мы будем наблюдать отсутствие комы и астигматизма при постоянстве сферической аберрации по всему полю зрения.

При компоновке оптической системы из апланатических и концентричных поверхностей сферическая аберрация, вносимая последними, определенным образом суммируется; используя концентричные поверхности, обладающие сферической аберрацией противоположных знаков, можно достичь уничтожения сферической аберрации для всей системы; при этом, уничтожая сферическую аберрацию в центре поля, мы тем самым одновременно достигнем более или менее полного уничтожения сферической аберрации и на краю поля.

Как апланатические, так и концентричные поверхности не свободны от кривизны поля; однако, комбинируя при компоновке системы апланатические и концентричные поверхности, обладающие кривизной поля разных знаков, можно добиться и исправления кривизны поля.

## § 74. Главнейшие конструкции изопланатических систем

Приведем для иллюстрации несколько конструкций изопланатических систем.

1. Изопланатический окуляр. Схема окуляра представлена на фиг. 170 (в обратном ходе лучей).

Первая линза изопланатического окуляра — плоско-выпуклая. При условии расположения предмета в бесконечности плоскую поверхность можно рассматривать как апланатическую; вторая поверхность принимается концентричной к ходу главного луча.

Третья поверхность окуляра апланатическая; четвертая, последняя, поверхность снова концентрична к ходу главного луча; в частном случае, когда ход главного луча после третьей поверхности параллелен оси системы, эта последняя поверхность становится плоской.

Приведем конструктивные элементы изопланатического окуляра:

$$\begin{array}{llll}
 r_1 = \infty & d_1 = 5 & n_2 = 1,5163 & f' = 26,49 \quad s' = 22,725 \\
 r_2 = -29,10 & d_2 = 1 & n_3 = 1 & \\
 r_3 = 25,35 & d_3 = 5 & n_4 = 1,5163 & \\
 r_4 = \infty & & & 
 \end{array}$$

Изопланатический окуляр свободен от астигматизма и комы; его сферическая аберрация постоянна по полю и отрицательна; окуляр



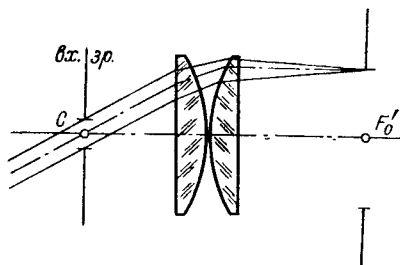
обладает значительной отрицательной дисторсией и, будучи составлен из двух положительных линз, не свободен от кривизны поля и является неахроматизированной системой.

2. Т е л е о б ъ е к т и в. Схема изопланатического телеобъектива представлена на фиг. 171.

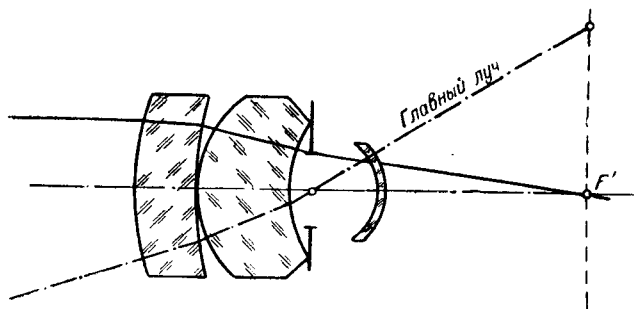
Телеобъектив состоит из трех линз; первые две линзы, положительные, строятся по схеме концентричной и апланатической поверхности; третья линза, отрицательная, строится из двух концентричных поверхностей.

Подбор оптической силы третьей линзы позволяет (аналогично случаю половинки объектива Плазмат, § 72) исправить кривизну поля всего телеобъектива; изменяя сферическую абберацию последней концентричной линзы при сохранении ее силы, можно добиться уничтожения сферической абберации, внесенной первой и третьей концентрическими поверхностями.

Для ахроматизации в первой или во второй линзе (или в обеих сразу) можно ввести так называемые «хроматические» радиусы.



Фиг. 170. Изопланатический окуляр.



Фиг. 171. Трехлинзовый изопланатический телеобъектив.

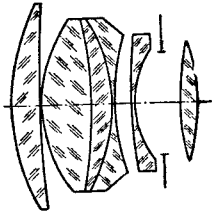
Построенный по такой схеме телеобъектив будет корригирован на все абберации, исключая дисторсию.

Приведем конструктивные данные изопланатического телеобъектива

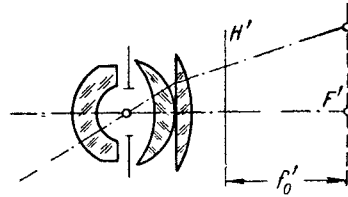
$r_1 = 50$	$d_1 = 14$	$n_2 = 1,6126$	$f' = 117,52$	$s'_F = 45,64$
$r_2 = 74,4$	$d_2 = 0$	$n_3 = 1$		
$r_3 = 27,1$	$d_3 = 20$	$n_4 = 1,6126$		
$r_4 = 24,09$	$d_4 = 19,79$	$n_5 = 1$		
$r_5 = -15$	$d_5 = 2,02$	$n_6 = 1,7280$		
$r_6 = -17,02$				

Необходимо заметить, что комбинация двух первых изопланатических линз, подобных линзам в рассмотренном телеобъективе, очень часто встречается в светосильных телеобъективах, например в объективе Эрностар (во второй изопланатической линзе этого объектива введены две коррекционные поверхности склейки), фиг. 172.

3. Светосильный объектив с удлиненным последним отрезком (фиг. 173). Этот объектив строится по следующей схеме. Первая, отрицательная, линза состоит из двух concentричных поверхностей; вторая линза, положительная, построена по схеме апланатическая и concentричная поверхности; третья линза также состоит из апланатической и concentричной поверхностей.



Фиг. 172. Объектив типа Эрностар.



Фиг. 173. Трехлинзовый объектив с удлиненным задним отрезком.

Подбор оптической силы первой линзы позволяет исправить кривизну поля всей системы; изменением сферической aberrации первой линзы можно исправить сферическую aberrацию всего объектива.

Для уничтожения хроматизма в линзах объектива можно ввести «хроматические» радиусы.

Объектив может обладать довольно значительным полем зрения; однако он будет иметь при этом довольно большую дисторсию, отрицательную по знаку.

Конструктивные элементы объектива следующие:

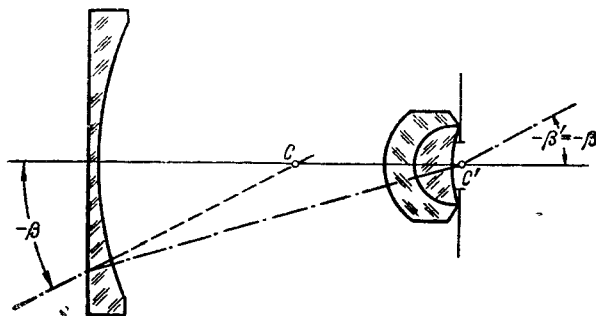
$r_1 = 12,11$	$d_1 = 5,18$	$n_2 = 1,7280$	$f' = 28,0$	$s'_P = 36,5$
$r_2 = 6,93$	$d_2 = 12,53$	$n_3 = 1$		
$r_3 = -17,89$	$d_3 = 4,03$	$n_4 = 1,6126$		
$r_4 = -11,86$	$d_4 = 0$	$n_5 = 1$		
$r_5 = \infty$	$d_5 = 3,78$	$n_6 = 1,6126$		
$r_6 = -23,94$				

4. Ортоскопический объектив (фиг. 174). В этом объективе первая линза плоско-вогнутая; ее вторая вогнутая поверхность строго concentрична к выходному зрачку самой линзы.

Вторая и третья линзы склеены друг с другом; стекло второй линзы — тяжелый флинт; стекло третьей линзы должно быть одинаковым со стеклом первой линзы.

Вторая линза состоит из двух concentричных поверхностей; последняя поверхность третьей линзы апланатическая и размещается строго в плоскости выходного зрачка всего объектива.

Система строго ортоскопична и свободна от хроматизма увеличения; подбором оптических сил линз может быть обеспечено исправление кривизны поля и сферической aberrации.



Фиг. 174. Ортоскопический фотообъектив.

Данные этого объектива следующие:

$r_1 = \infty$	$d_1 = 2,0$	$n_2 = 1,6126$	
$r_2 = 93,368$	$d_2 = 75,368$	$n_3 = 1$	$f' = s'_F = 57,056$
$r_3 = 18,0$	$d_3 = 8,0$	$n_4 = 1,7280$	
$r_4 = 10,0$	$d_4 = 10,0$	$n_5 = 1,61_6$	
$r_5 = 27,86$			

## Глава XXI

### НЕЦЕНТРИРОВАННЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

#### § 75. «Кособокие» оптические системы

До сих пор мы ограничивались рассмотрением оптических систем, центрированных около некоторой оси; однако современные оптические системы нельзя ограничивать одним лишь этим случаем.

В практике современного оптического приборостроения мы встречаем оптические системы, лишённые центрировки; к таким системам могут быть отнесены цилиндрические оптические системы, состоящие из цилиндрических поверхностей и имеющие две взаимноперпендикулярные плоскости симметрии, например анаморфотные насадки для широкоэкранного кино, и «кособокие» оптические системы, состоящие из сферических поверхностей, расположенных таким образом, что их центры не находятся на одной и той же прямой.

При разработке оптических систем весьма большое значение имеют сферические и несферические зеркала; во многих отношениях работа простого сферического зеркала оказывается значительно более выгодной, нежели работа линзового, подчас достаточно сложного, элемента.

Так, например, зеркала свободны от хроматизма; положительные сферические зеркала (вогнутые) обладают положительной кривизной поля; сферическая аберрация простого сферического зеркала во много раз меньше сферической аберрации линзы со сферическими поверхностями и т. п.

Одним из крупнейших недостатков зеркал является трудность выведения отраженных пучков лучей из пространства, в котором идут падающие на зеркало лучи.

При сохранении центрированности системы решение этой задачи приходится осуществлять за счет вырезания центральной части зеркала, что в результате приводит либо к зрачкам, имеющим кольцеобразную форму, либо даже к изображению, в котором также вырезана центральная часть.

Однако отказ от сохранения центрировки позволяет вывести отраженные зеркала пучки лучей из той части пространства, в которой шли падавшие на зеркало лучи, не прибегая при этом к созданию отверстий в зеркалах, что избавляет от необходимости придания зрачкам системы (или изображению) кольцеобразной формы.

Вместе с тем, отказ от центрированности в оптической системе приводит к возникновению в ней нецентрированных аберраций; поэтому немедленно возникает вопрос об изучении свойств аберраций, присущих нецентрированным системам.

В общем случае нецентрированную систему можно было бы представить состоящей из ряда различных поверхностей, расположенных произвольно в пространстве; однако, обращаясь к решению конкретной задачи — использованию отражательных сферических поверхностей, — мы приходим к созданию «кособоких» оптических систем, наклоны зеркал в которых преследуют лишь решение задачи разделения отраженных и падающих пучков лучей.

Совершенно ясно, что при такой постановке вопроса нет необходимости осуществлять поперечное смещение центров поверхностей — децентрировку — по всем направлениям; можно ограничиться децентрировками, при которых центры всех сферических поверхностей будут лежать в одной и той же плоскости, — наиболее характерный случай «кособокой» системы, сохраняющей одну плоскость симметрии.

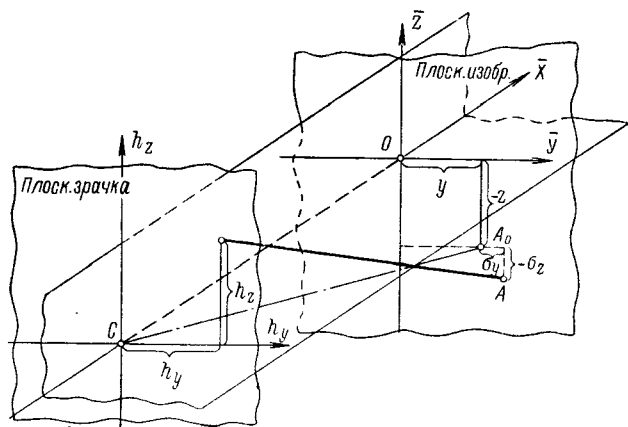
В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением именно таких «кособоких» оптических систем, состоящих из ряда сферических поверхностей, сохраняющих при нарушении центрировки одну плоскость симметрии.

Практически во многих случаях представляется возможным осуществить разделение падающих и отраженных пучков лучей при сравнительно небольших децентрировках элементов оптической системы. Это обстоятельство может в значительной степени облегчить исправление аберраций нецентрированной системы.

Перейдем непосредственно к рассмотрению aberrаций нецентрированных систем, имеющих одну плоскость симметрии (фиг. 175).

Расположим некоторую систему координатных осей таким образом, чтобы две из них были совмещены с плоскостью симметрии оптической системы; в этом случае мы могли бы назвать одну из этих двух осей, например ось  $X$ , осью системы; ось  $Z$  можно было бы назвать вертикальной осью и таким образом принять вертикальной плоскостью симметрии системы.

Рассматривая поперечные aberrации системы  $\sigma_z$  и  $\sigma_y$ , мы можем представить их в виде функции от координат луча на зрачке  $h_y$  и  $h_z$



Фиг. 175. Пример рассмотрения aberrаций нецентрированной системы, имеющей одну плоскость симметрии.

и координат луча на изображении  $y$  и  $z$  или соответственно от апертурных углов  $u_y$  и  $u_z$  и полевых углов  $\beta_y$  и  $\beta_z$ .

Таким образом, можно написать:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \sigma_z(u_z, u_y, \beta_z, \beta_y); \\ \sigma_y &= \sigma_y(u_z, u_y, \beta_z, \beta_y). \end{aligned} \right\} \quad (1095)$$

В равной степени и волновые aberrации системы также могут быть представлены в виде функции тех же самых переменных:

$$\varepsilon = \varepsilon(u_z, u_y, \beta_z, \beta_y). \quad (1096)$$

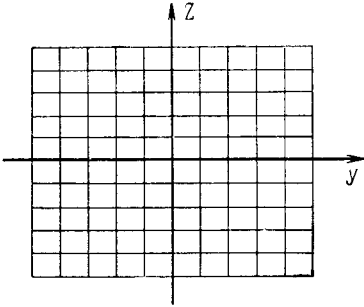
При этом, как и ранее [гл. IX, формула (394)], будут иметь место выражения

$$-\sigma_z = \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_z}; \quad -\sigma_y = \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_y}. \quad (1097)$$

В силу наличия симметрии в системе относительно вертикальной плоскости функция  $\sigma_z$  должна сохранять свое значение при одновременном изменении знака апертурного угла  $u_y$  в горизонтальной плоскости и знака полевого угла  $\beta_y$  также в горизонтальной плос-

кости; поэтому, представляя функцию  $\sigma_z$  в виде ряда от переменных  $u_z, u_y, \beta_z$  и  $\beta_y$  (предполагая такое разложение возможным), мы приходим к выводу, что в ней не могут существовать члены, в которых сумма степеней параметров  $u_y$  и  $\beta_y$  была бы нечетной.

Наоборот, функция  $\sigma_y$  в силу симметрии, при одновременном изменении знаков у параметров  $u_y$  и  $\beta_y$  на обратные, должна изменить знак (равно как и при изменении знаков у переменных  $u_y$  и  $\beta_y$  в четных степенях), иными словами, функция  $\sigma_y$  должна содержать только те члены, в которые параметры  $u_y$  и  $\beta_y$  входят в степенях, сумма показателей которых нечетная.



Фиг. 176. Анаморфоза изображения.

В равной степени, рассматривая выражение для волновой aberrации  $\epsilon$ , замечаем, что, в силу симметрии относительно вертикальной плоскости, в этом выражении должны отсутствовать члены, содержащие в себе величины  $u_y$  и  $\beta_y$  в степенях, суммы показателей которых нечетные.

Таким образом, можно написать:

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_z &= 3A''_z u_z^3 + C'' u_y^3 + 2A_z u_z + 2A'_z u_z \beta_z + C' u_y \beta_y + \\ &\quad + A_0 \beta_z + A \beta_z^3 + C \beta_y^3 + \dots \\ -\sigma_y &= 2C'' u_z u_y + 2A_y u_y + 2A'_y u_y \beta_z + C' u_z \beta_y + B_0 \beta_y + \\ &\quad + B \beta_z \beta_y + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1098)$$

и для волновой aberrации

$$\epsilon = A''_z u_z^3 + C'' u_z u_y^3 + A_z u_z^3 + A'_z u_z^2 \beta_z + A'_y u_y^2 \beta_z + C' u_z u_y \beta_y + A_0 u_z \beta_z + A u_z \beta_z^3 + C u_z \beta_y^3 + A_y u_y^3 + B_0 u_y \beta_y + B u_y \beta_z \beta_y + \dots \quad (1099)$$

Как и ранее, члены в формулах (1098), содержащие апертурные углы в первых степенях, будут выражать собой астигматизм; члены, содержащие апертурные углы во вторых степенях, — кому и т. д.

Члены, не содержащие апертурных углов, определяют собой дисторсию системы. Изучая aberrации «кособоких» систем, мы ограничимся рассмотрением лишь тех aberrаций, которые отсутствуют у центрированных систем; поэтому будем рассматривать лишь aberrации первого и второго порядка — астигматизм, кому и дисторсию.

Обращаясь к формулам (1098), мы видим, что члены, характеризующие астигматизм и дисторсию, могут быть разделены на члены, выражающие aberrации первого порядка (в этих членах переменные входят в первых степенях) — астигматизм первого порядка, постоянный по всему полю зрения:

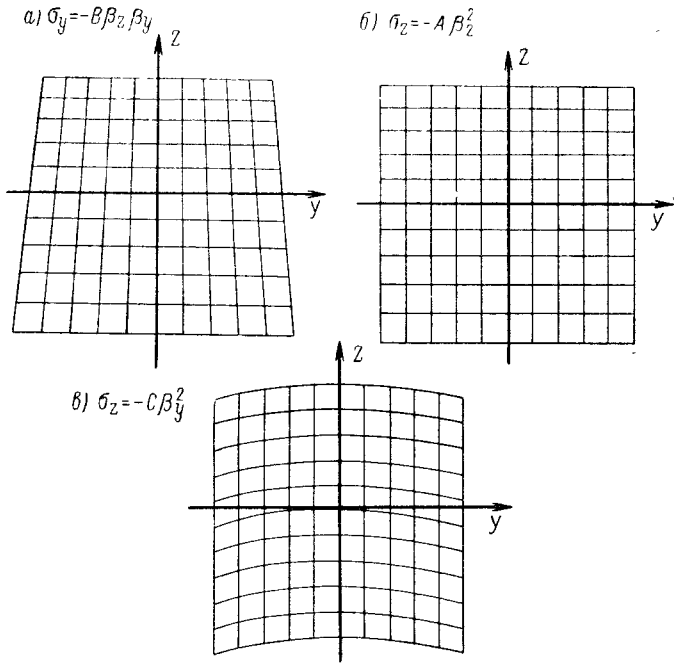
$$\left. \begin{aligned} -\sigma_z &= 2A_z u_z \\ -\sigma_y &= 2A_y u_y \end{aligned} \right\} \quad (1100)$$

и дисторсию первого порядка (или анаморфозу) (фиг. 176), пропорциональную 1-й степени линейного размера изображения:

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_z &= A_0 \beta_z \\ -\sigma_y &= B_0 \beta_y \end{aligned} \right\} \quad (1101)$$

и члены, выражающие aberrации второго порядка — астигматизм второго порядка

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_z &= 2A'_z u_z \beta_z + C' u_y \beta_y \\ -\sigma_y &= 2A'_y u_y \beta_z + C' u_z \beta_y \end{aligned} \right\} \quad (1102)$$



Фиг. 177. Различные виды дисторсии нецентрированной системы с одной плоскостью симметрии.

дисторсию второго порядка (фиг. 177)

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_z &= A \beta_z^2 + C \beta_y^2 \\ -\sigma_y &= B \beta_z \beta_y \end{aligned} \right\} \quad (1103)$$

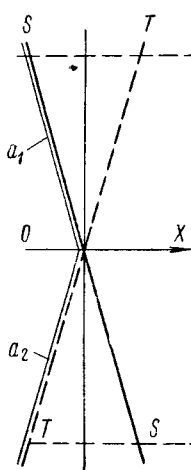
и кому второго порядка

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_z &= 3A''_z u_z^2 + C'' u_y^2 \\ -\sigma_y &= 2C'' u_z u_y \end{aligned} \right\} \quad (1104)$$

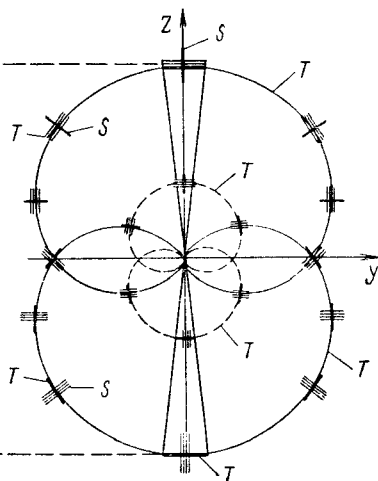
Так как в формулы (1104) не входят полевые углы  $\beta$ , нетрудно сделать вывод, что в «кособоких» системах кома второго порядка постоянна по полю.

Три члена, определяющие собой дисторсию второго порядка, можно назвать: дисторсией масштаба (член  $A\beta_z^2$ ), влияние которой выражается в изменении масштаба вдоль вертикальной плоскости (фиг. 177, б), дисторсией параллельной (член  $C\beta_y^2$ ), определяющей прогиб горизонтальных линий на изображении (фиг. 177, в) и дисторсией перспективной (последний член  $B\beta_z\beta_y$ ), действие которой аналогично перспективному преобразованию изображения (фиг. 177, а).

Два первых члена астигматизма второго порядка, входящие в вертикальную и горизонтальную составляющие, определяют наклоны



Фиг. 178. Астигматизм второго порядка:  
 $OX$  — ось системы;  $a_1 a_2$  — двугранная поверхность.



Фиг. 179. Вид изображения на двухгранной поверхности  $a_1 a_2$ .

сагиттального и меридионального изображений в вертикальной плоскости, показанных на фиг. 178; два вторых члена (определяемых одним и тем же коэффициентом, как это будет показано далее) дают «крестообразный» астигматизм, у которого для точек, лежащих на оси  $Y$  обе фокальные линии оказываются повернутыми относительно плоскости симметрии на  $45^\circ$  (фиг. 179).

Обратимся к волновому астигматизму второго порядка:

$$\varepsilon = A'_z u_z^2 \beta_z + A'_y u_y^2 \beta_z + C' u_z u_y \beta_y. \quad (1105)$$

Дифференцируя формулу (1105) по апертурным углам  $u_z$  и  $u_y$ , находим поперечные aberrации  $\sigma_z$  и  $\sigma_y$ :

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_z &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_z} = 2A'_z u_z \beta_z + C' u_y \beta_y \\ -\sigma_y &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_y} = 2A'_y u_y \beta_z + C' u_z \beta_y \end{aligned} \right\} \quad (1106)$$



Формулы (1106) показывают нам, что члены, выражающие собой «крестообразный» астигматизм, действительно определяются одним и тем же коэффициентом  $C'$ .

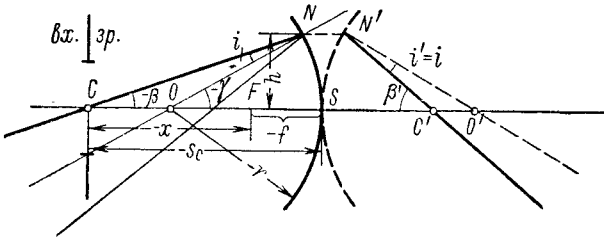
Используя выражение для волновой комы

$$\varepsilon = A_z'' u_z^3 + C'' u_z u_y^2 \quad (1107)$$

и дифференцируя его, получаем:

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_z &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_z} = 3A_z'' u_z^2 + C'' u_y^2 \\ -\sigma_y &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_y} = 2C'' u_z u_y \end{aligned} \right\} \quad (1108)$$

Формулы (1108) показывают, что в коме второго порядка могут существовать (как и в коме третьего порядка для центрированной системы) только два независимых друг от друга коэффициента.



Фиг. 180. Развертка сферического зеркала.

Перейдем к рассмотрению некоторых aberrаций сферических зеркал: астигматизма и сферической aberrации.

Обратимся к «развертке» сферического зеркала (фиг. 180). На чертеже представлен ход главного луча, падающего на зеркало под углом  $\beta$  к оси.

Расстояние от зеркала до входного зрачка примем равным  $s_c$ . Из чертежа следует

$$h = r \sin \gamma = [s_c - (1 - \cos \gamma) r] \operatorname{tg} \beta, \quad (1109)$$

откуда

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r \sin \gamma}{s_c - (1 - \cos \gamma) r} = \frac{\sin \gamma}{\frac{s_c}{r} - 1 + \cos \gamma}. \quad (1110)$$

Кроме того, из фиг. 180 находим

$$i = \beta - \gamma, \quad (1111)$$

а из сагиттального и меридионального инвариантов, полагая в случае отражения  $n' = -n = -1$  и предмет расположенным в бесконечности, получаем

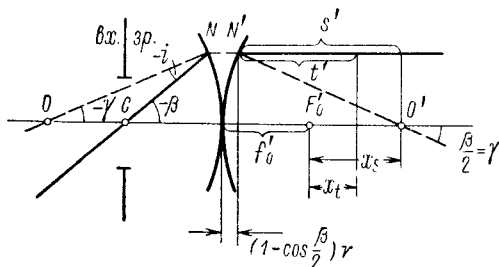
$$-\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{-\cos i' - \cos i}{r} = -\frac{\cos^2 i'}{f'} - \frac{\cos^2 i}{f}, \quad (1112)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} &= \frac{2}{r} \cos i \\ \frac{1}{t'} + \frac{1}{t} &= \frac{2}{r \cos i} \end{aligned} \right\} \quad (1113)$$

Переходя к «развертке отражения» на сферической поверхности («развертка отражения» на сферической поверхности осуществляется путем построения зеркального отображения самой поверхности и всех отраженных ею лучей относительно прямой, касательной к поверхности в точке, где происходит отражение оси, когда отрезки  $s'$  и  $t'$  изменяют знаки на обратные), определяем

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = -\frac{2}{r} \cos i; \quad \frac{1}{t'} - \frac{1}{t} = -\frac{2}{r \cos i}, \quad (1114)$$



Фиг. 181. Астигматизм сферического зеркала.

где отрезки  $s$ ,  $s'$ ,  $t$  и  $t'$  — суть расстояния  $NA_s$ ,  $N'A'_s$ ,  $NA_t$  и  $N'A'_t$  вдоль главного луча.

Предположим, что предмет расположен в бесконечности, тогда  $s = t = \infty$ , а формулы (1114) получат вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{s'} &= -\frac{2}{r} \cos i \\ \frac{1}{t'} &= -\frac{2}{r \cos i} \end{aligned} \right\} \quad (1115)$$

Перейдем к рассмотрению некоторых частных случаев.

1. Входной луч совпадает с зеркалом ( $s_c = 0$ ). Тогда, согласно формуле (1109), находим в качестве одного из корней уравнения

$$\gamma = 0; \quad h = 0, \quad (1116)$$

что, на основании формулы (1111), приводит нас к равенству

$$i = \beta; \quad (1117)$$

пользуясь формулами (1115), получаем

$$\frac{1}{s'} = -\frac{2}{r} \cos \beta; \quad \frac{1}{t'} = -\frac{2}{r \cos \beta} \quad (1118)$$

или

$$s' = -\frac{r}{2 \cos \beta}; \quad t' = -\frac{r}{2} \cos \beta. \quad (1119)$$

Так как в этом случае угол  $\beta'$  равен углу  $\beta$ , то, переходя к проекциям отрезков  $\bar{s}'$  и  $\bar{t}'$  на ось системы, находим

$$\bar{s}' = s' \cos \beta = -\frac{r}{2}; \quad \bar{t}' = t' \cos \beta = -\frac{r}{2} \cos^2 \beta, \quad (1120)$$

но так как

$$-\frac{r}{2} = f'_0 = s'_0, \quad (1121)$$

то формулы (1120) могут быть представлены в виде

$$\bar{s}' = f'_0 = s'_0; \quad \bar{t}' = f'_0 \cos^2 \beta = s'_0 \cos^2 \beta, \quad (1122)$$

а величина проекции астигматизма на ось системы выразится

$$\bar{t}' - \bar{s}' = f'_0 (\cos^2 \beta - 1) = -f'_0 \sin^2 \beta = x_t. \quad (1123)$$

Таким образом, для сферического зеркала при зрачке, совпадающем с самим зеркалом, сагиттальное изображение оказывается плоским, а меридиональная кривизна изображения и астигматизм растут пропорционально квадрату синуса полевого угла  $\beta$ .

2. После зеркала ход главных лучей телесентричен. В этом случае, согласно чертежу (фиг. 181), угол  $i$  равен половине полевого угла  $\beta$ ; поэтому

$$s' = -\frac{r}{2 \cos \frac{\beta}{2}}; \quad t' = -\frac{r}{2} \cos \frac{\beta}{2}, \quad (1124)$$

а величина астигматизма равна

$$t' - s' = -s' \sin^2 \frac{\beta}{2} = -f'_0 \frac{\sin^2 \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}}. \quad (1125)$$

Величина меридиональной и сагиттальной кривизны определится

$$\left. \begin{aligned} x_t &= f'_0 \left(1 - \cos \frac{\beta}{2}\right) > 0 \\ x_s &= f'_0 \left(1 - \frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}}\right) > x_t \end{aligned} \right\} \quad (1126)$$

Заметим, что обе поверхности — сагиттальная и меридиональная — имеют положительное искривление ( $x_t > 0$  и  $x_s > 0$ ).

Осуществляя переход от первого случая — совпадения зрачка с самим зеркалом — ко второму случаю, когда входной зрачок совпадает с передним фокусом зеркала, мы видим, что меридиональная кривизна поля изменила свой знак; поэтому, располагая входной зрачок на некотором расстоянии между передним фокусом зеркала

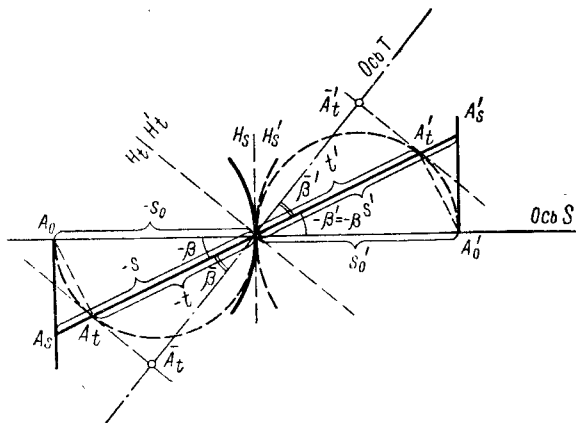
и самим зеркалом, мы можем добиться полного исправления меридиональной кривизны изображения.

3. Входной зрачок совпадает с центром зеркала. В этом случае, очевидно, углы  $i$  и  $i'$  будут равны нулю, и тогда астигматизм у зеркала будет полностью отсутствовать.

Кривизна поверхности изображения определится формулой

$$x_t = x_s = f'_0 (1 - \cos \beta). \quad (1127)$$

4. Изменение астигматизма наклонного сферического зеркала в связи с изменением положения и наклона предмета и изображения. Обратимся к развертке отражения



Фиг. 182. Астигматизм сферического зеркала при симметричном расположении предмета и изображения при симметричных аберрациях на предмете и изображении.

на сферическом зеркале (фиг. 182). Обусловим следующие соотношения между отрезками  $s$ ,  $s_0$  и  $t$ :

$$s_0 = s \cos i; \quad t = s_0 \cos i = s \cos^2 i. \quad (1128)$$

Согласно сагитальному и меридиональному инвариантам находим, помня, что  $i' = i$ :

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = -\frac{2 \cos i}{r} = \frac{\cos^2 i}{t'} - \frac{\cos^2 i}{t}, \quad (1129)$$

откуда, применяя формулы (1128), получаем:

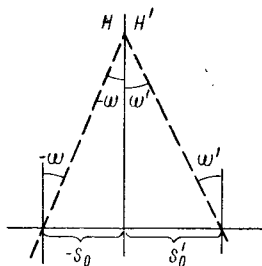
$$\frac{1}{s'} = \frac{\cos^2 i}{t'}; \quad t' = s' \cos^2 i. \quad (1130)$$

Формулы (1130) показывают, что при соблюдении условия (1128) для любых значений величины отрезка  $s$  сохранится постоянное отношение отрезков  $t'$  и  $s'$ ; эти соотношения будут сохраняться при любых увеличениях.

Вместе с тем, формулы (1128) и (1130) показывают, что сагиттальные предмет и изображение будут сохраняться перпендикулярными к нормали зеркала, восстановленной из точки падения главного луча, а меридиональные предмет и изображение будут располагаться на окружностях, касательных к зеркалу и имеющих своими диаметрами отрезки  $s_0$  и  $s'_0$  (так как уравнение  $t = s_0 \cos i$  есть не что иное, как полярное уравнение окружности).

В силу этого оказывается, что обе поверхности предмета (сагиттальная и меридиональная) и обе поверхности изображения будут наклонены к главному лучу на один и тот же угол по абсолютной величине; однако меридиональные и сагиттальные поверхности будут иметь наклоны, противоположные по знаку.

Перейдем к рассмотрению изменения наклонов предмета и изображения. Так как неповернутые плоскости предметов и изображений параллельны друг другу и соответствующим главным плоскостям  $H_s H'_s$  и  $H_t H'_t$ , то после поворота предметной плоскости, согласно теории соленейного средства, плоскость повернутого предмета, соответствующие главные плоскости оптической системы (в данном случае совпадающие друг с другом) и плоскость повернутого изображения должны пересекаться по одной прямой (фиг. 183).



Фиг. 183. Изменение наклона изображения при наклоне плоскости предмета.

Поэтому углы наклона плоскостей предмета и изображения будут связаны друг с другом соотношением

$$\frac{\operatorname{tg} \omega'}{\operatorname{tg} \omega} = \frac{s'_0}{s_0} = V, \quad (1131)$$

так как мы полагаем, что первая и последняя среды для зеркала одинаковы.

Обратимся к сагиттальному изображению (фиг. 184). На фигуре представлены ход главного луча —  $A_s N A'_s$  — и наклоненные элементы предмета в точке  $A_s$  и изображения в точке  $A'_s$ . Углы наклона предмета и изображения относительно направления, перпендикулярного главному лучу, обозначим соответственно через  $\psi_s$  и  $\psi'_s$ ; угол наклона  $\vartheta_s$  нормали зеркала к главному лучу примем равным  $-i$  ( $\vartheta_s = -i$ ).

Из фиг. 184 следует

$$\omega'_s = \vartheta_s + \psi'_s; \quad \omega_s = \vartheta_s + \psi_s. \quad (1132)$$

Обращаясь к формуле (1131) и полагая, что все углы  $\omega_s$ ,  $\vartheta_s$  и  $\psi_s$  малы, можем написать

$$\omega'_s = \vartheta_s + \psi'_s = V \omega_s = V_s \vartheta_s + V_s \psi_s, \quad (1133)$$

откуда

$$\psi'_s = (V_s - 1) \vartheta_s + \psi_s V_s \quad (1134)$$

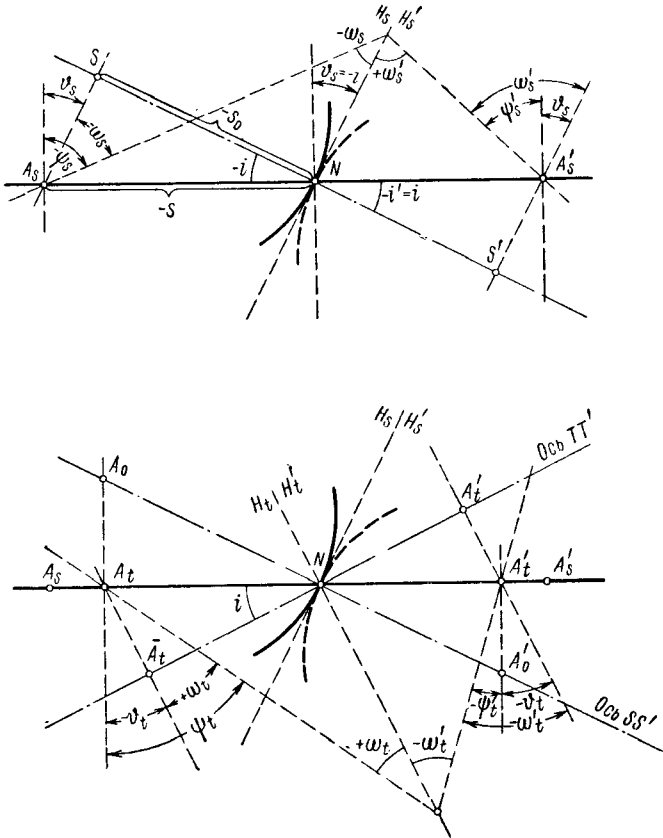
или, заменяя  $\vartheta_s = -i$ ,

$$\psi'_s = -(V_s - 1) i + \psi_s V_s. \quad (1135)$$

Для меридионального изображения формулы (1132) также сохранят свою справедливость, если принять  $\vartheta_t = +i$ .

Таким образом будет иметь место равенство

$$\psi'_t = (V_t - 1)i + V_t \psi_t. \quad (1136)$$



Фиг. 184. Работа наклонного сферического зеркала.

Рассмотрим систему из двух наклонных зеркал. Пользуясь дважды формулами (1135) и (1136) и вводя обозначения

$$x = i_2 - i_1; \quad x_s = -x_t = x, \quad (1137)$$

находим

$$\left. \begin{aligned} \psi_{3s} &= [V_{1,2}]_s (\psi_{1s} - i_1) - V_{2,s} x_s + i_2 \\ \psi_{3t} &= [V_{1,2}]_t (\psi_{1t} + i_1) - V_{2,t} x_t - i_2 \end{aligned} \right\} \quad (1138)$$

Поставив условия отсутствия наклонов между меридиональными и сагитальными поверхностями в пространстве предметов и в пространстве изображений, что может быть выражено равенствами

$$\psi_{1,s} = \psi_{1,t} \quad \text{и} \quad \psi_{3,s} = \psi_{3,t}, \quad (1139)$$

и полагая, что увеличения в сагиттальной и меридиональной плоскостях мало отличаются друг от друга

$$[V_{1,2}]_s \approx [V_{1,2}]_t \approx V_{1,2}; \quad V_{2,s} \approx V_{2,t} \approx V_2, \quad (1140)$$

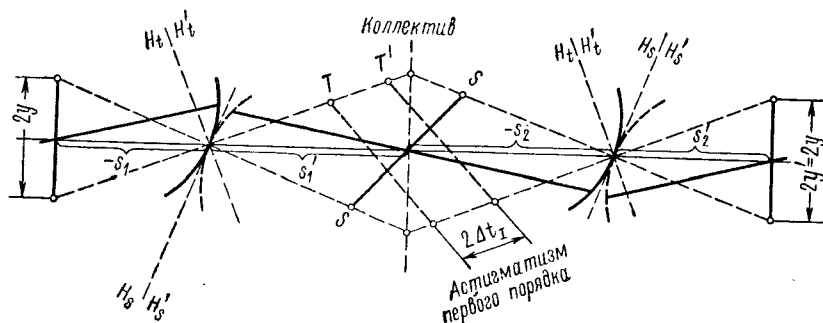
можем составить разность выражений (1138). Тогда

$$V_{1,2} i_1 + V_2 x - i_2 = 0. \quad (1141)$$

Развертывая выражение для величины  $x$ , можно формулу (1141) представить в несколько ином виде:

$$(V_1 - 1) V_2 i_1 + (V_2 - 1) i_2 = 0. \quad (1142)$$

Формулы (1141) и (1142) и представляют собой условия уничтожения астигматизма второго порядка.



Фиг. 185. Совокупность двух равнонаклоненных сферических зеркал.

Обратимся к частному случаю  $i_1 = i_2$  (случай равнонаклоненных зеркал). Из формулы (1141) следует

$$V = V_{1,2} = V_1 V_2 = 1; \quad V_2 = \frac{1}{V_1}. \quad (1143)$$

Общее увеличение системы  $V$  должно быть равно единице. Схема такой системы представлена на фиг. 185.

Перейдем к рассмотрению случая телескопической системы при расположении предмета в бесконечности. Тогда, очевидно, будут иметь место условия

$$V_1 = 0; \quad V_2 = \infty. \quad (1144)$$

Обратимся к формуле (1142). Деля эту формулу на увеличение  $V_2$ , получаем

$$(V_1 - 1) i_1 + \left(1 - \frac{1}{V_2}\right) i_2 = 0 \quad (1145)$$

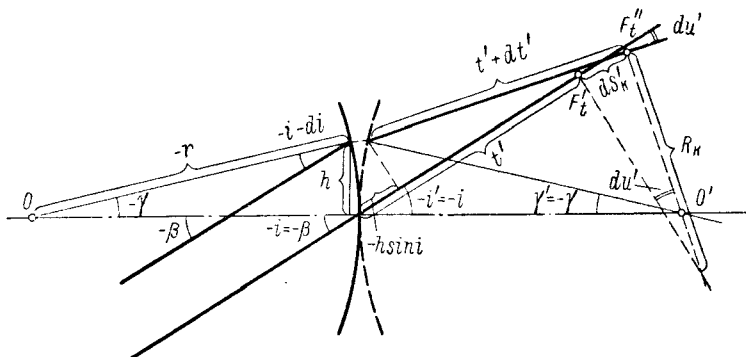
и, подставляя значения  $V_1$  и  $V_2$  из условий (1144), приходим к равенству

$$i_1 = i_2. \quad (1146)$$

Условие (1146) показывает, что телескопическая система свободна от астигматизма второго порядка в случае равнонаклоненных зеркал, независимо от увеличения самой системы.

Это свойство равнонаклоненных зеркал может быть с успехом использовано при создании простейших «кособоких» телескопических систем, например биноклей малых увеличений (при условии исправления астигматизма первого порядка отдельным коррекционным элементом).

5. Кома сферического зеркала. Рассмотрим случай, когда зрачок совпадает с самим зеркалом (фиг. 186). На фигуре представлен ход главного луча, проходящего через вершину зеркала под углом  $\beta$  к оси и параллельного ему наклонного луча, пересекаю-



Фиг. 186. Кома сферического зеркала при зрачке, совпадающем с самим зеркалом.

щего зеркало на высоте  $h$ . Угол нормали с осью в точке падения этого параллельного луча примем равным  $\gamma$ .

Точка  $F'_t$  — меридиональный фокус на главном луче; точка  $F''_t$  — меридиональный фокус на наклонном луче; расстояние между точками  $F'_t$  и  $F''_t$  определяет длину дуги каустики;  $R_k$  — радиус каустики.

Из фиг. 186 следует

$$-i = -\gamma - i - di, \quad (1147)$$

откуда

$$di = -\gamma = \gamma'; \quad (1148)$$

кроме того,

$$-i + \gamma' = -i - \gamma = -i - di + du' \quad (1149)$$

или

$$du' = 2di. \quad (1150)$$

Из чертежа определим высоту  $h$

$$h = r\gamma = -r di = 2f'_0 di. \quad (1151)$$

Согласно меридиональному инварианту, определим величину отрезка  $t'$ , полагая отрезок  $t = \infty$ ,

$$\frac{\cos^2 i}{t'} = -\frac{2 \cos i}{r}; \quad t' = -\frac{r}{2} \cos i. \quad (1152)$$



Дифференцируя формулу (1152), получаем

$$dt' = \frac{r}{2} \sin i \, di. \quad (1153)$$

Из фиг. 186 следует

$$t' + dt' = t' + ds'_k + h \sin i, \quad (1154)$$

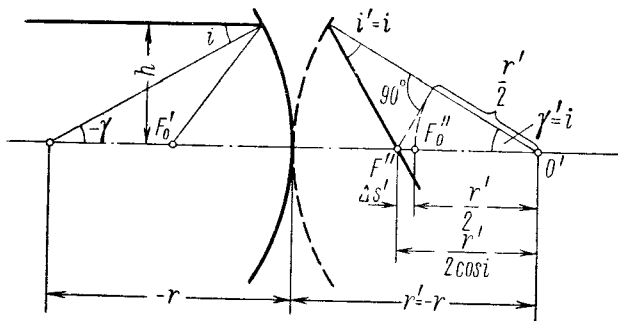
откуда находим длину дуги каустики  $ds'_k$

$$ds'_k = dt' - h \sin i = \frac{3}{2} r \sin i \, di. \quad (1155)$$

Переходим к определению радиуса каустики  $R_k$

$$R_k = \frac{ds'_k}{du'} = \frac{3}{4} r \sin i. \quad (1156)$$

Зная величину радиуса  $R_k$ , можно определить величину поперечной комы  $\sigma_k$  в плоскости, перпендикулярной главному лучу.



Фиг. 187. Сферическая aberrация сферического зеркала.

Имеем

$$\sigma_k = \frac{R_k (du')^2}{2} = \frac{3}{8} r (du')^2 \sin i = -\frac{3}{4} f_0' (du')^2 \sin i. \quad (1157)$$

Переходя к поперечной коме  $\bar{\sigma}_k$  в плоскости, перпендикулярной к оси системы, и заменяя  $du'$  на  $u'$  получаем

$$\bar{\sigma}_k = \frac{\sigma}{\cos \beta'} = -\frac{3}{4} f_0' u'^2 \operatorname{tg} \beta'. \quad (1158)$$

6. Сферическая aberrация для бесконечно удаленного предмета. Обратимся к чертежу (фиг. 187), на котором представлена развертка зеркала с ходом крайнего луча, падающего на зеркало параллельно оси. На чертеже:  $h$  — высота луча;  $i$  — угол падения луча;  $\gamma = -i$  — угол между нормалью и осью;  $\gamma' = -\gamma$  — угол между нормалью и осью в пространстве изображений развертки.

Из чертежа следует

$$\Delta s' = F_0'' O' - F'' O' = \frac{r'}{2} - \frac{r'}{2 \cos i} \quad (1159)$$

или

$$\Delta s' = \frac{r'}{2} \left( 1 - \frac{1}{\cos i} \right) = \left( 1 - \frac{1}{\cos i} \right) f'_0; \quad (1160)$$

для малых углов  $i$

$$\Delta s' = \left( 1 - 1 - \frac{i^2}{2} \right) f'_0 = -\frac{i^2}{2} f'_0, \quad (1161)$$

но так как

$$i \approx \frac{h}{2f'_0}, \quad (1162)$$

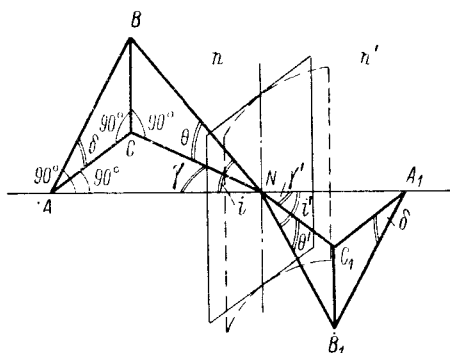
то

$$\Delta s' = -\frac{h^2}{8f'_0}. \quad (1163)$$

Формула (1163) выражает приближенное значение сферической абберации сферического зеркала.

## § 76. Цилиндрические системы

В предыдущем параграфе уже упоминалось о цилиндрических оптических системах, нашедших применение в широкоэкранном кино (анаморфотные насадки); другой широкой областью использования



Фиг. 188. Преломление «косого» луча на плоской поверхности, касательной к цилиндрической поверхности.

цилиндрических систем является их применение в различного рода осциллографах, где с помощью цилиндрических линз достигается уменьшение величины светового пятна при одновременном увеличении апертуры, что необходимо для обеспечения тонкой фотозаписи и повышения светосилы оптической системы. Так как световое пятно, используемое при записи, является изображением некоторой щели, то возникает необходимость выявления главнейших причин, могущих повлиять на увеличение ширины записи; такими причинами являются искажения

изображения (дисторсия) и ухудшение качества изображения (астигматизм), вносимые самими цилиндрическими линзами; обычные aberrации, свойственные центрированным оптическим системам, мы сейчас рассматривать не будем.

Для определения дисторсии, возникающей в цилиндрических линзах, нам необходимо предварительно рассмотреть явление преломления косоугольного луча на плоской поверхности (фиг. 188).

На фигуре представлен ход косоугольного луча, не лежащего ни в плоскости чертежа, ни в плоскости ей перпендикулярной (луч  $BNB_1$ );  $ANA_1$  — нормаль к преломляющей поверхности в точке падения

луча;  $CNC_1$  — проекция луча на плоскость, перпендикулярную плоскости чертежа;  $n$  и  $n'$  — показатели преломления до и после преломляющей поверхности;  $i$  и  $i'$  — углы падения и преломления луча;  $\theta$  и  $\theta'$  — углы между падающим лучом и его проекцией и преломленным лучом и его проекцией;  $\delta$  — угол наклона плоскости преломления рассматриваемого косоугольного луча к плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через нормаль  $ANA_1$ . Из фиг. 188 следует:

$$\frac{AB}{BN} = \sin i; \quad \frac{A_1B_1}{B_1N} = \sin i', \quad (1164)$$

но

$$AB = \frac{BC}{\sin \delta}; \quad A_1B_1 = \frac{B_1C_1}{\sin \delta}, \quad (1165)$$

поэтому

$$\frac{BC}{BN \sin \delta} = \sin i; \quad \frac{B_1C_1}{B_1N \sin \delta} = \sin i'. \quad (1166)$$

но

$$\frac{BC}{BN} = \sin \theta; \quad \frac{B_1C_1}{B_1N} = \sin \theta', \quad (1167)$$

и, таким образом,

$$n \frac{\sin \theta}{\sin \delta} = n \sin i = n' \sin i' = n' \frac{\sin \theta'}{\sin \delta} \quad (1168)$$

откуда

$$n \sin \theta = n' \sin \theta'. \quad (1169)$$

В случае ряда преломляющих плоскостей, перпендикулярных одной и той же плоскости — главному сечению — углы  $\theta'_s$  между преломленным лучом и его проекцией на главное сечение для данной плоскости равны углам  $\theta_{s+1}$  между падающим лучом и его проекцией для последующей плоскости; поэтому формула (1169) справедлива не только для одной преломляющей плоскости, но и для всей рассматриваемой нами системы  $k$  плоскостей; в частности, если первая и последняя среды одинаковы — т. е. если  $n'_k = n_1$ , то углы  $\theta_1$  и  $\theta'_k$  равны.

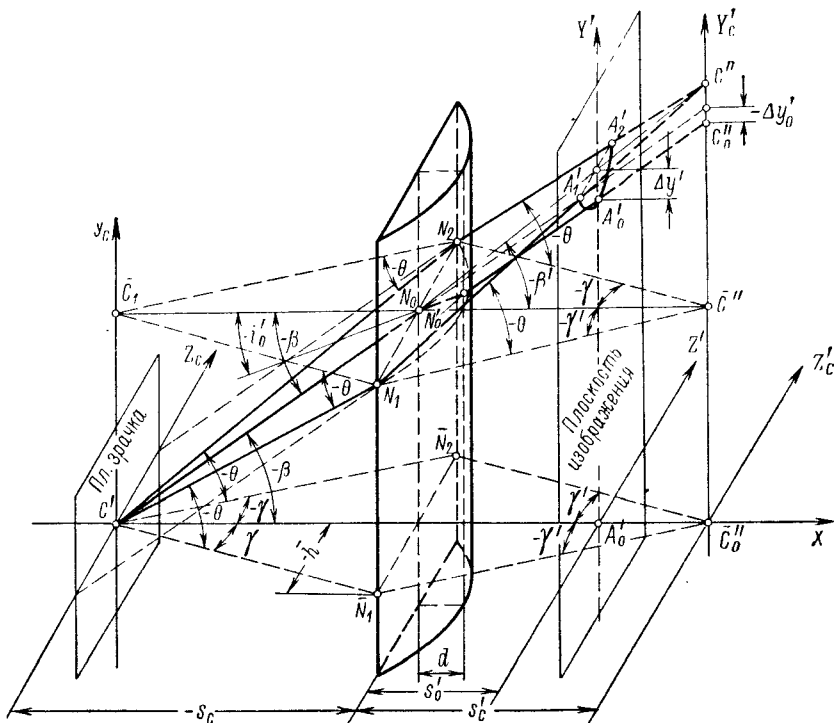
Совершенно ясно, что это явление будет иметь место и для системы цилиндрических поверхностей с параллельными осями.

В качестве примера рассмотрим возникновение искривления изображения отрезка прямой линии, перпендикулярной «плоскости симметрии»  $Y_cC'X$ , в плоско-выпуклой цилиндрической линзе, поставленной за некоторой оптической системой (фиг. 189).

Как видно из построения на фиг. 189, изображение  $A_1A'_0A_2$  отрезка прямой линии получилось искривленным с выпуклостью, направленной к «плоскости главного сечения» оптической системы ( $Z_cC'X$ ).

Возникновение такого искривления изображения, вызываемого дисторсией цилиндрической линзы, легко объяснить, если рассмотреть пучок из трех главных лучей  $C'N_1$ ,  $C'N_0$  и  $C'N_2$ , исходящих из центра выходного зрачка  $C'$  предшествующей оптической системы и лежащих

в одной плоскости, перпендикулярной плоскости симметрии и составляющей угол  $\beta$  с плоскостью «главного сечения» системы. Предположим, что боковые лучи этого пучка  $C'N_1$  и  $C'N_2$  проходят через острые края цилиндрической линзы; тогда, после преломления цилиндрической линзой, оба эти луча  $N_1C''$  и  $N_2C''$  окажутся в плоскости, тоже перпендикулярной плоскости симметрии и составляющей угол  $\beta'$  с плоскостью главного сечения, и в точке  $C''$  создадут изображение центра выходного зрачка  $C'$ . В то же время средний главный луч



Фиг. 189. Преломление наклонного плоского пучка лучей цилиндрической линзой: если  $|s'_c| < |s_c|$ , то  $|\beta'| > |\beta|$ ; если  $|s'_c| > |s_c|$ , то  $|\beta'| < |\beta|$ ; если  $|s'_c| = |s_c|$ , то  $\beta' = \beta$ .

$C'N_0N'_0C''_0$  при прохождении через центральную часть цилиндрической линзы (сечение которой плоскостью преломления представляет собой как бы плоскопараллельную пластинку) сместится параллельно первоначальному направлению на величину

$$\Delta y'_0 = d(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} i_0) \approx \frac{n-1}{n} \operatorname{tg} \beta \cdot d,$$

где  $d$  — толщина цилиндрической линзы в плоскости симметрии.

Из чертежа видно, что величина дисторсии  $\Delta y'$  может быть определена по следующей формуле:

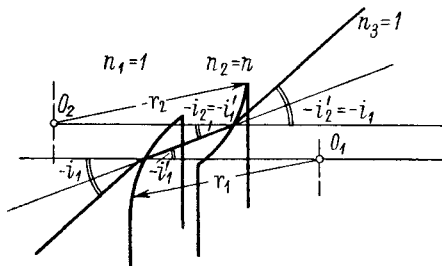
$$\Delta y' = -\Delta y'_0 - s'_0(\operatorname{tg} \beta' - \operatorname{tg} \beta) \approx -\operatorname{tg} \beta \left[ \frac{n-1}{n} d + \frac{\bar{n}^2 s'_0}{2} \left( \frac{1}{s_c^2} - \frac{1}{s_c'^2} \right) \right].$$

Эта величина и является стрелкой прогиба дуги искривленного изображения  $A_1A_0A_2$  прямой.

Заметим, что такое искривление изображения отрезков прямых, перпендикулярных плоскости симметрии цилиндрических линз, можно устранить введением теллцентрического хода главных лучей в плоскостях, параллельных плоскости «главного сечения» системы ( $\beta = 0$ ), например, с помощью установки между выходным зрачком предшествующей системы и цилиндрической линзой коллектива, передний фокус которого совмещен с центром этого зрачка  $C'$ .

Такое явление наблюдается и в анаморфотных насадках, применяемых в широкоэкранном кино, что, в особенности при больших полях зрения, приводит к весьма ощутимым искажениям изображения, являющимся, как уже говорилось, дисторсией, присущей цилиндрическим системам.

Перейдем к рассмотрению астигматизма цилиндрической линзы в воздухе. Как это видно из чертежа (фиг. 190), на котором показан ход главного луча, лежащего в плоскости «симметрии» цилиндрической линзы, условно называемой далее «меридиональной» плоскостью, сама цилиндрическая линза в воздухе в этой «меридиональной» плоскости представляет собой плоскопараллельную пластинку и ее влияние на «меридиональную» кривизну изображения полностью соответствует «меридиональному» искривлению изображения, вносимому плоскопараллельной пластинкой.



Фиг. 190. Астигматизм цилиндрической линзы в воздухе.

Однако в сагиттальной плоскости цилиндрическая линза не будет эквивалентна плоскопараллельной пластинке; поэтому нам будет необходимо рассмотреть «сагиттальное» искривление изображения, присущее цилиндрической линзе.

В рассматриваемом нами случае будет иметь место равенство углов  $i'_1 = i_2$  и, вследствие этого, углов  $i_1 = i'_2$ . Учитывая эти равенства и дважды пользуясь сагиттальным инвариантом, можем написать

$$\left. \begin{aligned} \frac{n'_1}{s'_1} - \frac{n_1}{s_1} &= \frac{n'_1 \cos i'_1 - n_1 \cos i_1}{r_1} \\ \frac{n'_2}{s'_2} - \frac{n_2}{s_2} &= \frac{n'_2 \cos i'_2 - n_2 \cos i_2}{r_2} \end{aligned} \right\} \quad (1170)$$

Но так как для тонких линз  $s'_1 = s_2$ , то, помня, что  $n_1 = n_3 = 1$  и что  $n_2 = n$ , и суммируя обе формулы (1170), получаем

$$\frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s_1} = (n \cos i' - \cos i) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (1171)$$

или

$$\frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s_1} = \frac{n \cos i' - \cos i}{n - 1} \varphi_0 = \frac{n + 1}{n \cos i' + \cos i} \varphi_0 = \varphi_s. \quad (1172)$$

Из формулы (1172) видно, что с ростом углов  $i$  сила  $\varphi_s$  цилиндрической линзы возрастает по отношению к силе  $\varphi_0$  линзы в ее главном сечении. Эта величина сагиттальной силы цилиндрической линзы не зависит от ее формы — соотношения между ее радиусами.

Формула (1172) выражает изменение сагиттальной силы цилиндрической линзы вдоль луча; совершенно ясно, что при оценке искривления сагиттальной поверхности изображения, наблюдаемого у всей системы, следует учитывать и наклон самого главного луча к плоскости симметрии системы.

## Глава XXII

### РАСТРОВАЯ ОПТИКА

#### § 77. Работа элемента простого растрового экрана

Задача получения изображения в ряде случаев может быть решена путем использования оптических систем, составленных из совокупности отдельных элементов, каждый из которых создает изображение одной точки — элемента изображения.

Подобного рода оптические системы носят название растровых оптических систем.

В настоящее время растровые оптические системы нашли наиболее широкое применение в виде разного рода растровых экранов как прозрачных, так и отражающих, работающих соответственно в проходящем и отраженном свете.

Изображение после растрового экрана обычно рассматривается невооруженным глазом; поэтому, во избежание восприятия глазом структуры растрового экрана, величину отдельного элемента экрана выбирают с таким расчетом, чтобы она не могла быть разрешена глазом наблюдателя.

Для этого достаточно, чтобы видимая наблюдателем угловая величина элемента растрового экрана была равной (или меньшей) углу, определяющему собой разрешающую способность глаза наблюдателя и принимаемому, как известно, равным одной угловой минуте.

Обратимся к принципиальной схеме работы отдельного элемента растрового экрана.

Полагая экран прозрачным, можно представить себе эту схему в следующем виде (фиг. 191).

На фиг. 191 представлена проекционная оптическая система, обладающая выходным зрачком диаметром  $2\rho'_i$  в меридиональной плоскости и диаметром  $2\rho'_s$  в сагиттальной плоскости, для наклонного пучка лучей, главный луч которого составляет с осью системы некоторый угол  $\beta'$  (в общем случае конечной величины).

После проекционной системы, в плоскости создаваемого ею изображения, размещается растровый экран, состоящий из множества элементарных линз с фокусными расстояниями  $f'_i$  и  $f'_s$  и размерами

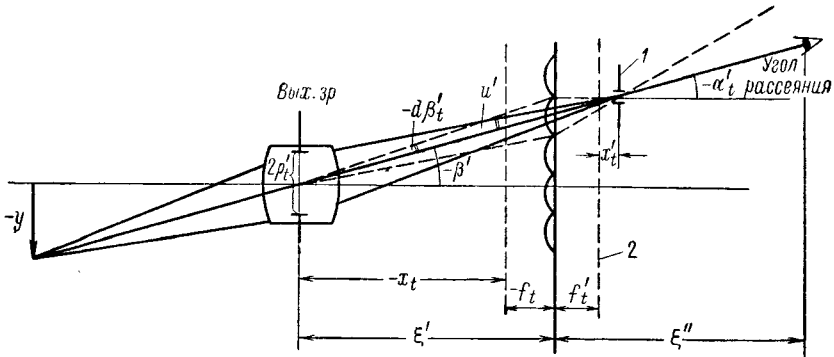
$2y'_i$  и  $2y'_s$ , соответственно в меридиональной и сагиттальной плоскостях.

Расстояние между выходным зрачком проекционной системы и плоскостью растра примем равным  $\xi'$

$$\xi' = -x_t - f_t = \dots x_s - f_s. \quad (1173)$$

Расстояние от растра до глаза наблюдателя примем равным величине  $\xi''$ .

Как известно, эта величина не должна быть меньше, нежели так называемое расстояние «наилучшего видения», равное 250 мм.



Фиг. 191. Работа простого растрового экрана.

1 — изображение элементом растра выходного зрачка проекционной системы;  
2 — задняя фокальная поверхность растрового экрана.

Поэтому, задаваясь величиной  $\xi''$  и углами разрешения  $2\gamma''_{0t}$  и  $2\gamma''_{0s}$  в меридиональной и сагиттальной плоскостях и полагая для простоты полевые углы  $\beta'$  малыми (пренебрегая разностью между косинусами угла  $\beta'$  и единицей), мы можем найти наибольшие размеры элемента растра соответственно в меридиональной и сагиттальной плоскостях:

$$2dy'_t = \xi'' 2\gamma''_{0t}; \quad 2dy'_s = \xi'' 2\gamma''_{0s}. \quad (1174)$$

Имея в виду, что обычно можно принимать углы разрешения  $2\gamma''_{0t} = 2\gamma''_{0s} = 1' = 0,0003$ , приходим к выводу, что в общем случае размеры отдельного элемента растрового экрана будут малы. Так, например, если расстояние от экрана до наблюдателя равно одному метру, наибольшие размеры элемента экрана будут представлены квадратом со сторонами, равными  $0,3 \times 0,3$  мм.

Обычно для отдельного элемента растра выходной зрачок проекционной системы играет роль предмета; поэтому после элемента растра мы должны получить астигматическое изображение выходного зрачка с меридиональным и сагиттальным диаметрами, равными  $2\rho''_t$  и  $2\rho''_s$ .

Величины этих диаметров могут быть определены через фокусные расстояния элемента раstra по формулам:

$$\left. \begin{aligned} 2\rho_t'' &= 2\rho_t' V_t = -2\rho_t' \frac{f_t}{x_t} = 2\rho_t' \frac{f_t}{\xi_t - f_t'} \\ 2\rho_s'' &= 2\rho_s' V_s = -2\rho_s' \frac{f_s}{x_s} = 2\rho_s' \frac{f_s}{\xi_s - f_s'} \end{aligned} \right\} \quad (1175)$$

Если фокусные расстояния элемента раstra малы, формулы (1175) могут быть представлены в виде

$$2\rho_t'' = \frac{f_t'}{\xi_t} 2\rho_t'; \quad 2\rho_s'' = \frac{f_s'}{\xi_s} 2\rho_s'. \quad (1176)$$

В частном случае размеры изображения выходного зрачка проекционной системы могут оказаться большими, нежели размеры элемента раstra, создавшего это изображение; условимся исключить этот случай из нашего рассмотрения, как не имеющий широкого практического применения.

В силу этого, всегда будем полагать, если это не будет специально оговорено, что изображение выходного зрачка проекционной системы, создаваемое отдельным элементом раstra, будет меньшим, нежели размеры самого элемента раstra.

Обозначим величины углов, под которыми отдельный элемент раstra будет наблюдаться из центра выходного зрачка проекционной системы, через  $2d\beta_t'$  и  $2d\beta_s'$ , причем эти углы могут быть определены с помощью формул

$$2d\beta_t' = \frac{2dy_t'}{\xi_t}; \quad 2d\beta_s' = \frac{2dy_s'}{\xi_s}. \quad (1177)$$

По отношению к элементу раstra углы  $d\beta_t'$  и  $d\beta_s'$  можно рассматривать как апертурные; поэтому применяя к ним инвариант Лагранжа — Гельмгольца и помня, что система раstra находится в воздухе, можно написать

$$2x_t' = \frac{2d\beta_t'}{V_t} \approx 2d\beta_t' \frac{\xi_t'}{f_t'}; \quad 2x_s' = \frac{2d\beta_s'}{V_s} \approx 2d\beta_s' \frac{\xi_s'}{f_s'}, \quad (1178)$$

откуда, пользуясь формулой (1177), получаем окончательно

$$2x_t' = \frac{2dy_t'}{f_t'}; \quad 2x_s' = \frac{2dy_s'}{f_s'}. \quad (1179)$$

Углы  $2\alpha_t'$  и  $2\alpha_s'$  назовем углами рассеяния элемента раstra. Как это видно из фиг. 191, если глаз наблюдателя будет помещен внутри конуса, определяемого меридиональным и сагитальным углами рассеяния, он сможет увидеть изображение выходного зрачка проекционной системы, созданное элементом растрового экрана.

Обращаясь к формулам (1174) и принимая угол разрешения  $2\gamma_{0t}'' = 2\gamma_{0s}'' = 2\gamma_0'' = 1' = 0,0003$ , мы, пользуясь формулами (1179), находим

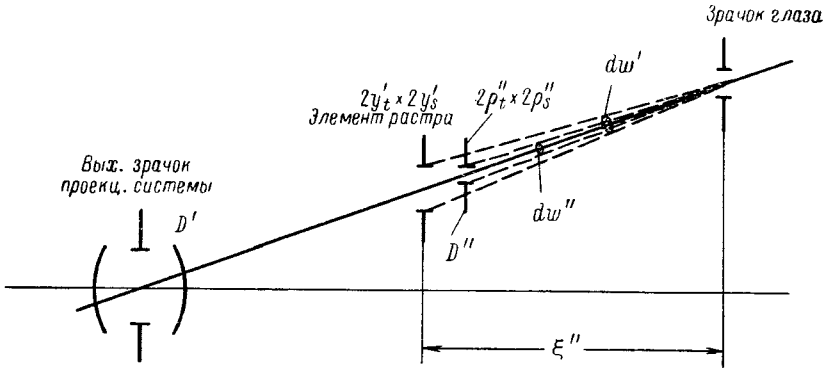
$$2\alpha_t' = \frac{\xi_t''}{f_t'} 2\gamma_0'' = 0,0003 \frac{\xi_t''}{f_t'}; \quad 2\alpha_s' = \frac{\xi_s''}{f_s'} 2\gamma_0'' = 0,0003 \frac{\xi_s''}{f_s'}. \quad (1180)$$



Из формул (1180) видно, что углы рассеяния элемента растрового экрана определяются отношением расстояния от экрана до наблюдателя к фокусным расстояниям элемента раstra, умноженным на величину угла разрешения.

### § 78. Световой баланс элемента раstra

На фиг. 192 изображен выходной зрачок проекционной системы  $D'$  для некоторого главного луча; далее на этом главном луче расположен элемент раstra с размерами  $2y_t \times 2y_s'$ ; за элементом раstra располагается изображение  $D''$  выходного зрачка проекционной



Фиг. 192. Определение светового баланса растрового экрана.

системы, создаваемое этим элементом, и, наконец, на расстоянии  $\xi''$  от элемента раstra располагается входной зрачок глаза диаметром  $2\rho_0$ .

Определим площадь изображения выходного зрачка проекционной системы  $D''$ . Учитывая увеличения  $V_t$  и  $V_s$ , создаваемые элементом раstra, мы можем выразить эту площадь через величину площади  $D'$  самого выходного зрачка. Получаем

$$D'' = D' V_t V_s. \quad (1181)$$

В случае, если элемент раstra будет расположен на оси системы, выходной зрачок будет представлен зрачком для осевого пучка; тогда можно написать

$$D_0'' = D_0' V_t V_s. \quad (1182)$$

Из отношения формул (1181) и (1182) получаем функцию виньетирования после элемента раstra

$$F''(\beta) = \frac{D''}{D_0''} = \frac{D'}{D_0'} = F'(\beta). \quad (1183)$$

Перейдем к определению величины светового потока, попадающего в глаз наблюдателя через отдельный элемент раstra.

В общем случае величина светового потока определится известной формулой

$$dF_0' = B d\omega_0' ds_0, \quad (1184)$$

где  $B$  — яркость предмета;

$d\omega'_0$  — телесный угол, построенный из центра зрачка глаза и опирающийся на контур отдельного элемента предмета;

$ds_0$  — величина площади входного зрачка глаза.

Если элемент предмета равен по своей площади элементу растра (идеальный случай), световой поток, воспринимаемый глазом, определяется из выражения

$$dI'_0 = B \frac{ds'^1}{\xi'^2} ds_0. \quad (1185)$$

При работе же с растровым экраном наблюдатель будет видеть освещенным не весь элемент растра, а лишь изображение выходного зрачка проекционной системы; в соответствии с этим световой поток, вошедший в зрачок глаза, уменьшится

$$dI'' = B d\omega'' ds_0 = B \frac{D''}{\xi''^2} ds_0. \quad (1186)$$

Составляя же отношение обоих световых потоков, мы можем определить кажущееся понижение освещенности изображения или «коэффициент полезного действия растрового экрана», который условимся обозначать так:

$$\eta = \frac{dF''}{dF'_0} = \frac{D''}{ds'} = \frac{D' V_t V_s}{2dy'_t \cdot 2dy'_s} = \frac{D'_0 F'(\beta)}{2dy'_t \cdot 2dy'_s} V_t V_s. \quad (1187)$$

Но так как стороны элемента растра могут быть выражены, согласно формулам (1179), через углы рассеяния и величины фокусных расстояний элемента, то формула (1187) может быть представлена в следующем виде:

$$\eta = \frac{D_0 F'(\beta)}{2\alpha'_t \cdot 2\alpha'_s} \cdot \frac{V_t}{f'_t} \cdot \frac{V_s}{f'_s} = \frac{D_0 F'(\beta)}{2\alpha'_t 2\alpha'_s} \cdot \frac{1}{x_t} \cdot \frac{1}{x_s} = \frac{D_0 F'(\beta)}{\xi'^2 2\alpha'_t 2\alpha'_s} \quad (1188)$$

или окончательно

$$\eta = \frac{\pi \rho_0'^2}{\xi'^2} \cdot \frac{F'(\beta)}{2\alpha'_t 2\alpha'_s} = \frac{\pi u_0'^2}{4\alpha'_t \alpha'_s} F'(\beta). \quad (1189)$$

## § 79. Коллектив. Растр-коллектив

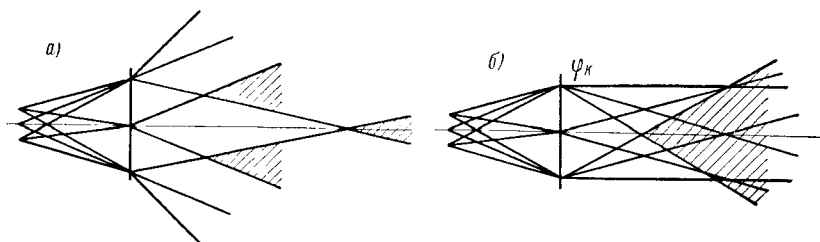
Простой растровый экран решает задачу преобразования углов рассеяния, но сам по себе он не способен изменять ход главных лучей.

Следствием этого может явиться невозможность наблюдения изображения на всем экране (если пучки лучей после прохождения их через экран не будут перекрывать друг друга) или сильная ограниченность расположения наблюдателя в зоне взаимного перекрытия углов рассеяния от крайних точек экрана.

Картина работы экрана в подобном случае представлена на фиг. 193 (слева).

Однако зона взаимного перекрытия пучков лучей, прошедших через экран, может быть значительно расширена и приближена к эк-

рану, если в плоскости экрана будет установлена линза-коллектив, соответственным образом изменяющая ход главных лучей и заставляющая их пересечь ось после экрана. Эта картина представлена на фиг. 193 (справа). Такое непосредственное добавление коллективной линзы к экрану практически сильно ограничено ее конструктивными размерами; поэтому размеры экрана, работающего на просвет, в этом случае получаются довольно малыми (растровые экраны, работающие на отражение, находятся в более благоприятных условиях, так как в качестве коллектива может быть использовано соответственное



Фиг. 193. Работа растрового экрана без коллектива и с коллективом:  
*а* — без коллектива; *б* — с коллективом.

искривление поверхности экрана, которое можно рассматривать как введение зеркального коллектива).

Однако и для прозрачного экрана возможна замена единой коллективной линзы вторым, растровым экраном — растром-коллективом, действие которого будет равносильно действию коллективной линзы.

Рассмотрим чертеж (фиг. 194), на котором представлен ход наклонного пучка лучей, проходящего последовательно через некоторый элемент растрового экрана, расположенный на расстоянии  $y'$  от оси, и через соответственный элемент растра-коллектива, который расположен в плоскости изображения выходного зрачка проекционной системы, создаваемого элементом первого растра.

Ставя перед растром-коллективом задачу переноса точки пересечения главных лучей с осью системы на расстояние  $s''$  после растра-коллектива, мы должны обеспечить излом главных лучей на элементах растра-коллектива с таким же отношением отрезков  $s'_κ$  и  $s_κ$ , как отношение отрезка  $s''$  после экрана к отрезку  $s-d$  до экрана.

При расчете элемента растра-коллектива будем исходить из следующих соображений.

Размеры элемента растра-коллектива должны быть того же порядка, что и размеры элемента основного растра; число элементов растра-коллектива должно быть равно числу элементов основного растра.

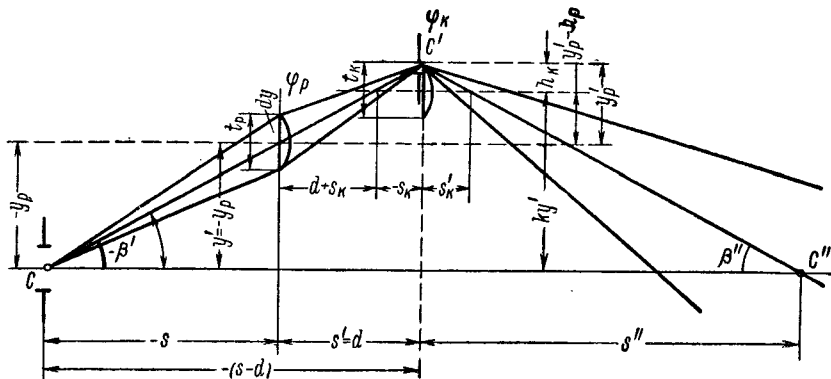
Рассмотрим два случая.

1. Расстояние  $y'_р$  от оси до изображения точки *C*, создаваемого элементом основного растра, меньше или равно половине высоты  $t_р$  элемента растра.

2. Расстояние  $y'_P$  от оси до изображения точки  $C$ , создаваемого элементом растра, превосходит половину высоты  $t_P$  элемента растра.

Совершенно очевидно, что второй случай является более общим, поэтому начнем с рассмотрения этого случая.

Возвратимся к фиг. 194. Полагая, что расстояние  $y'_P$  от оси до изображения точки  $C$ , создаваемого элементом растра, больше половины высоты элемента растра — шаг растра  $t_P$ , мы должны



Фиг. 194. Работа растр-коллектива.

поместить элемент растрового коллектива на соответственно большем расстоянии  $ky'$  от оси. Тогда можно написать

$$y'_P > \frac{t_P}{2}. \quad (1190)$$

Высоту главного луча на главной плоскости элемента растрового коллектива относительно его оси обозначим  $h_K$ . Эта величина будет, очевидно, меньше, нежели величина  $y'_P$ ; таким образом

$$h_K < y'_P. \quad (1191)$$

Свяжем все эти величины

$$y' + y'_P = ky' + h_K, \quad (1192)$$

откуда

$$y'_P - h_K = ky' - y' = (k - 1)y'. \quad (1193)$$

Величины  $y'_P$  и  $h_K$  могут быть, согласно фиг. 194, определены по формулам

$$y'_P = -\operatorname{tg} \beta' \cdot d \quad (1194)$$

и

$$h_K = s_K \operatorname{tg} \beta'. \quad (1195)$$

Тогда формула (1193) может быть представлена в следующем виде:

$$k - 1 = \frac{y'_P - h_K}{y'} = -\frac{d + s_K}{y'} \operatorname{tg} \beta' \quad (1196)$$

или

$$k - 1 = - \frac{d + s_K}{s}. \quad (1197)$$

Задаваясь в формуле (1197) какими-либо значениями отрезка  $s$ , мы будем получать те или иные значения коэффициента  $k$ , определяющего собой изменение шага растрового коллектива.

Однако, стремясь получить наименьшие возможные значения оптических сил для элементов растра-коллектива, мы должны обусловить значение высоты  $h_K$ , приняв ее равной половине шага растра  $t_K$  коллектива. Таким образом,

$$h_K = \frac{t_K}{2} = k \frac{t_P}{2}. \quad (1198)$$

Исходя из этого условия, можно определить величину коэффициента  $k$ . Пользуясь формулой (1196), находим:

$$k - 1 = \frac{y'_P - k \frac{t_P}{2}}{y'}, \quad (1199)$$

откуда определяем

$$y'_P + y' = k \left( y' + \frac{t_P}{2} \right) \quad (1200)$$

и сам коэффициент  $k$ :

$$k = \frac{y'_P + y'}{\frac{t_P}{2} + y'} = \frac{1 + \frac{y'_P}{y'}}{1 + \frac{t_P}{2y'}}. \quad (1201)$$

Но так как величины  $y'_P$  и  $h_K$  малы по отношению к величине  $y'$ , то формула (1201) может быть преобразована в приближенную формулу

$$k \approx 1 + \frac{y'_P}{y'} - \frac{t_P}{2y'} = 1 + \frac{y'_P - \frac{t_P}{2}}{y'}. \quad (1202)$$

Пользуясь формулой (1202), можно охарактеризовать оба случая работы растра-коллектива. Так как равенство величин  $y'_P$  и  $\frac{t_P}{2}$  приводит к равенству коэффициента  $k$  единице, то в первом случае  $k < 1$ , а во втором  $k > 1$ .

Имея в распоряжении коэффициент  $k$  и пользуясь формулой (1197), мы можем определить величину отрезка элемента растра-коллектива  $s_K$ ; имея в распоряжении отрезки  $s$  и  $s''$ , можем получить величину отрезка  $s'_K$ :

$$s'_K = s_K \frac{s''}{s - d} \approx s_K \frac{s''}{s} \quad (1203)$$

и затем определить оптическую силу элемента растра-коллектива по известной формуле:

$$\varphi_K = \frac{1}{s'_K} - \frac{1}{s_K}. \quad (1204)$$

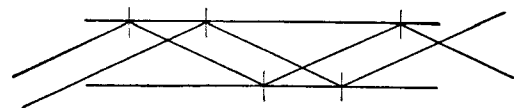
## § 80. Светопроводы. Волоконная оптика<sup>1</sup>

Предположим, что мы имеем цилиндрическую трубку, внутренняя поверхность которой зеркальная (фиг. 195). Проследим ход лучей, вошедших внутрь такой трубки.

Рассматривая лучи, лежащие в меридиональной плоскости, мы легко можем установить, что ход этих лучей подобен ходу луча между двумя параллельными плоскими зеркалами; поэтому всякий луч, лежащий в меридиональной плоскости, попадая в зеркальную цилиндрическую трубку, выйдет из нее или под тем же самым углом к оси трубки, что будет иметь место при четном числе отражений, или при нечетном числе отражений угол выходящего из трубки луча с ее осью

получит обратный знак, сохранив неизменным свое абсолютное значение.

Несколько сложнее обстоит дело с лучами, не лежащими в меридиональных плоскостях; плоскости, которые можно провести через такие лучи параллельно оси трубки, после каждого отражения поворачиваются



Фиг. 195. Работа светопровода.

вокруг оси трубки на некоторый угол; однако углы луча с осью трубки также не изменяются по своей абсолютной величине.

Из сказанного можно сделать вывод, что вводя в трубку пучок, все лучи которого составляли с осью трубки некоторый постоянный угол, мы и после трубки снова получим пучок, все лучи которого составят с осью трубки тот же угол, который имел место для лучей входившего в трубку пучка.

Поэтому, не интересуясь взаимным перераспределением лучей в пучке, мы можем принять, что отражательная цилиндрическая трубка переносит входящий апертурный пучок лучей и элементарную площадку, образуемую входным срезом трубки, на место выходного среза трубки с сохранением всех апертурных углов.

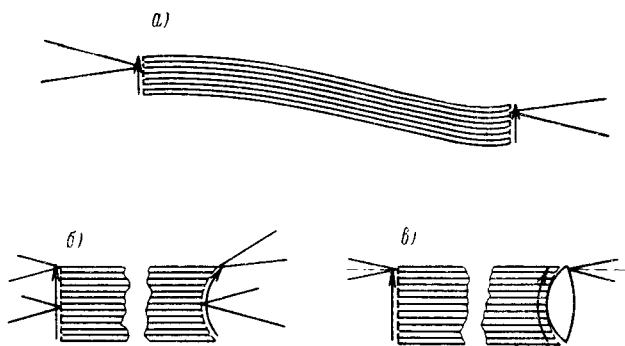
Таким образом, отражательную цилиндрическую трубку можно рассматривать как средство переноса элементарной площадки и связанного с нею апертурного пучка лучей — так называемый «светопровод».

Такого рода светопроводы обычно представляют стеклянный цилиндр, у которого наружная поверхность используется как отражающая в силу наличия на ней полного внутреннего отражения лучей, идущих внутри цилиндра.

Необходимо отметить, что стеклянный светопровод может иметь не только цилиндрическую форму; светопровод можно осуществить и в виде палочки не круглого, а, например, прямоугольного сечения; кроме того, в известных пределах пределов светопровод может быть изогнут.

<sup>1</sup> В. Б. Вайнберг, В. В. Богатырева и Л. Н. Иванова, Передача изображения по многожильным световодам (волоконная оптика), «Оптико-механическая промышленность», 1960, № 7.

Придавая светопроводу малый диаметр, мы приходим к светопроводящей нити — «светопроводящему волокну»; располагая такие светопроводящие нити в ряд, можно передавать по ним ряд точечных элементов — строку какого-либо объекта; накладывая же несколько рядов волокон друг на друга, можно передать по такому устройству ряд строк — получить растровое изображение объекта (фиг. 196, а).



Фиг. 196. Работа «жгута» из светопроводящих волокон.

Небезынтересно, что, придавая оконечностям жгута, составленного из светопроводящих волокон, неплоскую форму, можно с помощью подобного устройства изменять величину искривления поверхности изображения (фиг. 196, б). Однако при этом будут изменяться также и направления выходящих из отдельных волокон апертурных пучков, создавая тем самым изменение положения выходного зрачка; тем не менее, соединяя криволинейные оконечности жгута с соответственными коллективными линзами, можно осуществлять изменение кривизны поля при сохранении заданного положения выходного зрачка (фиг. 196, в).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Берек М., Основы практической оптики, ГТТИ, 1933.
  2. Волосов Д. С., Методы расчета сложных фотографических систем, ОГИЗ, 1948.
  3. Максutow Д. Д., Астрономическая оптика, ОГИЗ, 1946.
  4. Мартин Л., Техническая оптика, Физматгиз, 1960.
  5. Оценка качества оптического изображения (Сборник докладов), перевод с английского, Геодиздат, 1959.
  6. Русинов М. М., Оптика аэросъемочных приборов, ОНТИ, 1936.
  7. Русинов М. М., Габаритный расчет оптических систем, Геодиздат, 1960.
  8. Слюсарев Г. Г., Методы расчета оптических систем, Л., 1937.
  9. Слюсарев Г. Г., Геометрическая оптика, АН СССР, М., 1946.
  10. Тудоровский А. И., Теория оптических приборов, АН СССР, тт. I и II, 1952.
  11. Соггаду А. Е., Applied Optics and Optical Design, P. I, 1929.
  12. Czapski S. und O. Eppenstein, Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente nach Abbe, 3 Aufl., 1924.
  13. Chrétien H., Cours de calcul des combinaisons optiques, Revue d'optique theorie et instrument, 1934.
  14. Handbuch der Physik, B. XVIII, 1929.
  15. Rohr M., Bilderzeugung in optischen Instrumente vom Standpunkte der Geometrischen Optik, Berlin, 1904.
-



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
 <b>Часть I. Геометрическая широкоугольная оптика</b>	
<i>Глава I. Солинейное средство при больших полях</i>	
§ 1. Основные положения . . . . .	5
§ 2. Понятие о фокусных расстояниях вдоль главного луча . . . . .	7
§ 3. Формулы для сагиттальной плоскости . . . . .	11
§ 4. Условие изображения бесконечно малого предмета на оси широкими пучками лучей . . . . .	13
§ 5. Изменение кривизны поля при изменении увеличения . . . . .	14
 <i>Глава II. Оптика узких астигматических пучков</i>	
§ 6. Узкие пучки в меридиональной плоскости. Вывод меридионального инварианта . . . . .	15
§ 7. Узкие пучки в сагиттальной плоскости. Вывод сагиттального инварианта . . . . .	17
§ 8. Вывод соотношений для фокусных расстояний одной преломляющей поверхности . . . . .	18
 <i>Глава III. Одна линза в воздухе</i>	
§ 9. Тонкая линза в воздухе при зрачке, совпадающем с линзой . . . . .	21
§ 10. Случай линзы с острым краем, работающей в положении наименьшего отклонения луча . . . . .	24
§ 11. Объектив Гипергон . . . . .	26
§ 12. Концентричные линзы . . . . .	29
§ 13. Линзы с апланатическими поверхностями . . . . .	—
§ 14. Определение сагиттальных и меридиональных фокусных расстояний на главном луче, проходящем через острый край линзы . . . . .	31
 <i>Глава IV. Формулы перехода от одной преломляющей поверхности к другой</i>	
§ 15. Формулы перехода в меридиональной плоскости . . . . .	37
§ 16. Определение фокусного расстояния вдоль главного луча и расстояния от последней преломляющей поверхности до фокуса . . . . .	39
§ 17. Линзы конечной толщины . . . . .	40
§ 18. Формулы перехода в сагиттальной плоскости . . . . .	41
 <b>Часть II. Ограничение световых пучков при больших полях зрения</b>	
<i>Глава V. Виньетирование</i>	
§ 19. Виньетирование в одном и том же пространстве . . . . .	43
§ 20. Численное определение виньетирования . . . . .	46

## Глава VI. Аберрационное виньетирование

§ 21. Изображение диафрагмы оптической системой . . . . .	54
§ 22. Определение аберрационного виньетирования . . . . .	59
§ 23. Аберрационное виньетирование в случае отсутствия дисторсии . . . . .	62

## Глава VII. Образование изображения широкими пучками лучей при большом поле зрения

§ 24. Образование изображения в меридиональной плоскости при отсутствии аберраций, нарушающих резкость изображения, и отсутствии кривизны поля . . . . .	67
--	----

## Глава VIII. Светосила и светораспределение по полю зрения

§ 25. Светораспределение по полю зрения в случае тонких световых пучков . . . . .	70
§ 26. Светосила системы при широких пучках лучей . . . . .	75
§ 27. Потери на отражение от поверхностей линз . . . . .	78
§ 28. Просветление оптики . . . . .	79
§ 29. Потери света на поглощение в стекле . . . . .	80

## Часть III. Учение об аберрациях

### Глава IX. Некоторые общие сведения из волновой теории света

§ 30. Основные определения . . . . .	82
§ 31. Волновые аберрации . . . . .	87
§ 32. Зависимость между волновыми и геометрическими аберрациями . . . . .	90

### Глава X. Разбор аберраций наклонного пучка

§ 33. Астигматизм . . . . .	94
§ 34. Кома . . . . .	98
§ 35. Сочетание комы с астигматизмом . . . . .	105
§ 36. Сферическая аберрация . . . . .	107
§ 37. Сферическая аберрация пятого порядка на оси системы . . . . .	115
§ 38. Переход от поперечных аберраций к волновым аберрациям . . . . .	119

### Глава XI. Образование дифракционного изображения

§ 39. Оценка величины волновых аберраций. Условие Рэлея. Критерий Штреля. Величина площади зрачка, удовлетворяющая условию Рэлея . . . . .	123
§ 40. Распределение световой энергии в изображении точки в простейших случаях . . . . .	132
§ 41. Распределение энергии в изображении точки в случае астигматизма . . . . .	138

### Глава XII. Хроматизм

§ 42. Дисперсия стекла. Оптические материалы . . . . .	150
§ 43. Хроматизм отдельной линзы в воздухе. Тонкая линза, concentричная линза, линза с равными радиусами. Мениск Максутава . . . . .	153
§ 44. Ахроматизация системы из двух тонких соприкасающихся линз . . . . .	156
§ 45. Изменение хроматизма в связи с изменением положения предмета . . . . .	159
§ 46. Хроматизм в зрачке . . . . .	163

## Часть IV. Синтез оптических систем

### Глава XIII. Введение

§ 47. Общая задача разработки оптической системы . . . . .	166
§ 48. Историческое развитие техники расчета оптических систем . . . . .	167

### Глава XIV. Анализ свойств отдельных элементов оптической системы

§ 49. Анализ сферической аберрации одной преломляющей сферической поверхности при различных положениях предмета . . . . .	172
---	-----

§ 50. Сферическая aberrация одной преломляющей поверхности в зависимости от положения предмета . . . . .	176
§ 51. Сферическая aberrация плоскости и плоскопараллельной пластинки . . . . .	181
§ 52. Сферическая aberrация на оси отдельной линзы в воздухе . . . . .	182

*Глава XV. Полевые aberrации отдельной линзы в воздухе.*  
Роль прогиба линзы

§ 53. Нахождение положений входного зрачка, обеспечивающих исправление астигматизма . . . . .	191
§ 54. Определение зональных ошибок астигматизма . . . . .	195
§ 55. Сферическая aberrация линзы в наклонных пучках . . . . .	203

*Глава XVI. Линза в воздухе с несферической поверхностью*

§ 56. Некоторые свойства поверхностей второго порядка . . . . .	213
§ 57. Положения анастигматических зрачков для поверхностей второго порядка . . . . .	216
§ 58. Кома плоско-параболической линзы . . . . .	219
§ 59. Сферическая aberrация плоско-выпуклых линз с несферическими поверхностями . . . . .	222
§ 60. Сферическая aberrация плоско-параболической линзы в наклонных пучках . . . . .	225
§ 61. Дисторсия плоско-параболической линзы . . . . .	227
§ 62. Несферические коррекционные пластинки. Коррекционная пластинка Шмидта. Выравнивающее стекло с деформированной поверхностью для исправления дисторсии . . . . .	229

*Глава XVII. Работа склеенной поверхности*

§ 63. Астигматизм, вносимый склеенной поверхностью . . . . .	234
§ 64. Влияние склеенной поверхности на сферическую aberrацию . . . . .	242

*Глава XVIII. Несклеенные системы*

§ 65. Исправление кривизны поля с помощью концентричной линзы. Объективы типа Плазмат . . . . .	252
§ 66. Условие для исправления кривизны поля зрения у систем, в которых главный луч имеет малые углы падения и преломления на преломляющих поверхностях . . . . .	255
§ 67. Фотообъектив типа триплет . . . . .	259
§ 68. Работа концентричной воздушной прослойки . . . . .	263

*Глава XIX. Перенесение предмета в бесконечность в объективах симметричных типов*

§ 69. Дисторсия. Роль aberrаций в зрачках . . . . .	271
§ 70. Изменение астигматизма при изменении положения предмета . . . . .	275
§ 71. Изменение комы при изменении положения предмета . . . . .	277
§ 72. Метод сохранения углов излома на преломляющих поверхностях для лучей осевого пучка объективов симметричных типов при переходе от одного положения предмета к другому . . . . .	282

*Глава XX. Изопланатические системы*

§ 73. Графоаналитический метод составления системы из изопланатических поверхностей . . . . .	289
§ 74. Главнейшие конструкции изопланатических систем . . . . .	292

*Глава XXI. Нецентрированные оптические системы*

§ 75. «Кособокие» оптические системы . . . . .	295
§ 76. Цилиндрические системы . . . . .	310

Глава XXII. Растровая оптика

§ 77. Работа элемента простого растрового экрана . . . . .	314
§ 78. Световой баланс элемента растра . . . . .	317
§ 79. Коллектив. Растр-коллектив . . . . .	318
§ 80. Светопроводы. Волоконная оптика . . . . .	322
Литература . . . . .	324

Михаил Михайлович Русинов  
ТЕХНИЧЕСКАЯ ОПТИКА

Редакторы издательства: *Т. Л. Лейкина, И. А. Бородулина*

Обложка художника *Я. В. Таубвурцеля*

Технический редактор *М. М. Петерсон*

Корректоры: *Л. Р. Кухтевич, Э. А. Мирошниченко*

---

Подписано к печати 11/II 1961 г. М-37578. Формат бумаги 60 × 92<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Печ.  
л. 21,0 (1 вклейка). Уч.-изд. л. 18,6. Тираж 15 000 экз. Заказ № 1402.

---

Ленинградский Совет народного хозяйства. Управление полиграфической про-  
мышленности. Типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького.  
Ленинград, Гатчинская, 26.

## ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
5	11-я сверху	Одна	Однако	Корр.
7	10-я сверху	изображениям	изображениями	>
32	ф-ла (134)	$\frac{d\beta'_{sM}}{d\beta_{sM}}$	$\frac{d\beta'_{sM}}{d\beta_{sM}}$	>
33	ф-ла (136)	$\bar{y}'_{sF'}$	$\bar{y}'_{sF'}$	>
41	8-я сверху	глазного	главного	Авт.
59	1-я сверху	$dy_s$	$dy'_s$	Тип.
62	7-я снизу	$\xi$	$\xi_0$	Корр.
69	6-я сверху	(297)	(298)	Авт.
73	5-я снизу	$d\bar{s}_0$	$d\bar{s}$	>
75	Фиг. 52	$d\bar{y}'_0$	$d\bar{y}'$	>
93	Фиг. 63	Характер	Пример	Ред.
95	3-я снизу	$A'_1$	$A'_t$	Корр.
117	Фиг. 87	$\arctg \Delta$	$\arctg \frac{\Delta}{2}$	Авт.
119	ф-ла (503)	$A''_t u^A_t$	$A'''_t u^A_t$	Тип.
149	Фиг. 100	образование абсолютно	образование изображения абсолютно	Авт.
150	9-я сверху	волны	длины волны	Корр.
162	Фиг. 105	$-x_0 -f f^1$	$-x_a -f^1 f$	Авт.
193	8-я снизу	$\cos^2 i'^2$	$\cos^2 i''_2$	Тип.
218	ф-ла (808)	$x \sqrt{1+B}$	$\pm x \sqrt{1+B}$	Авт.
231	Фиг. 136	$\beta' \beta''$	$-\beta' -\beta''$	>
235	1-я снизу	$-\bar{d}$	$\bar{d}$	Корр.
238	11-я сверху	силы оптической	оптической силы	Авт.
272	Фиг. 159	$-y_F$	$-y_{oF}$	>
276	Фиг. 160	$B'_t$	$\bar{B}'_t$	>
300	Фиг. 178	двухгранная	коническая	>
300	Фиг. 179	двухгранной	конической	>
320	Фиг. 194	$y'_p - h_p$	$y'_p - h_k$	>

